제 2 교시

수학 영역

정답표:

공통과목

1	2	3	4	5
④	③	②	④	①
6	7	8	9	10
③	①	⑤	②	②
11	12	13	14	15
③	③	④	④	②
16	17	18	19	20
12	31	6	39	23
21	22			
59	66			

선택과목-확률과 통계

23	24	25	26	27
②	②	④	④	③
28	29	30		
③	23	385		

선택과목-미적분

23	24	25	26	27
①	②	①	④	⑤
28	29	30		
③	10	97		

선택과목-기하

23	24	25	26	27
③	③	②	③	③
28	29	30		
⑤	29	7		

예상 등급컷:

	미적분	기하	확통
1등급	84	84	88
2등급	76	76	80

전 문항의 간단한 풀이 및 피드백으로 이어집니다. 손을 다쳐서 이전처럼 자세한 풀이는 아니고... 개괄적인 풀이와 정답인 케이스를 위주로 적습니다. ㅠ

김다영 님께서 작성하신 공통 미적분 해설도 있습니다(마지막에)

1번: $(2^{2\sqrt{2}-\sqrt{5}})^{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}=8$입니다.

2번: $f'(x)=3x^2-4x+4$이므로 $f'(1)=3$입니다.

3번: 공차를 d라 하면, $a_6-a_3=a_2$로부터 $a_2=3d$이고, $2a_7-a_9=a_5=18$이므로 $d=3$입니다. 따라서 $a_{10}=33$입니다.

4번: $x=a$를 대입하고 방정식 풀어주시면 $a=4$가 나옵니다.

5번: $\cos\theta=-\frac{5}{13}$이므로 $\tan\theta=-\frac{12}{5}$입니다.

6번: 두 함수를 빼 주시면 $3x(x-4)$이므로 넓이 공식 $\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$을 적용해주시면 답은 32입니다.

7번: 그래프의 x축과의 교점은 $(-4,0)$이므로 $\log_a 5=4$입니다.

8번: $f'(2)=0$으로부터 $f(-1)=3$입니다. 이로부터 $f(x)=-x^3+12x+14$입니다. 극댓값은 30입니다.

9번: 좌변에 연속함수의 적분으로 항등식이 주어져 있습니다. 적분식은 그 값이 0이 되도록 하는 값을 대입할 수 있죠? 그래서 $g(0)=0$입니다. 연속성에 의해 $g(1)=0$이고, 연속함수의 적분식은 미분가능하므로 $g'(1)=1$입니다. 이로부터 $g(x)=x^3-x^2$임을 알 수 있죠.

10번: 9평에도 비슷한 형태의 식이 나왔습니다. 여기서 중요한 것은 $\cos x+\sin\frac{\pi}{5}$를 $\cos x-\cos\frac{7}{10}\pi$로 바라볼 수 있느냐입니다. 이로부터 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$가 각각 하나씩 유일하게 결정이 됩니다. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{7}{10}\pi$, $\frac{13}{10}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$죠?

11번: 운동방향이 바뀌지 않으려면, 초기 속도를 $v(0)$이라 할 때 $v(0) \geq -1$이 되어야 합니다. 가속도 식으로부터 $t=2$를 전후하여 각각 다른 속도 표현이 나오고, 단순히 각각을 적분하여서 $t=5$일 때의 위치를 구할 수 있습니다. 최소가 되는 순간은, $v(0)=-1$일 때이겠죠?

12번: 의도적으로 당황할만한 디자인을 담아둔 문항입니다. 일단 a_3과 a_6은 같을 수 없음을 체크한 뒤, $n=3, 6$일 때에 확정되는 것들만 적어주면 됩니다. 그 이후 귀류법으로 모든 항들이 유일하게 결정될 터이니, 처음 겉보기에만 당황스러워 보이지 결국 계산 노동만 하시면 되는 문제입니다. $a_3=9, a_6=4$러 결정될 것입니다. $a_1=3$, $a_2=6$, $a_8=1$, $a_9=4$, $a_{10}=-5$, $a_{11}=-2$입니다.

13번: 얘도 겉보기 난이도만 있지, 결국 둘 중 하나가 삼중근 식임을 파악하셨다면 쉽습니다. 공통인수를 가져야 하니 $k=1$임을 쉽게 알 수 있고, 만약 $f(x)-1$이 $(x-1)^3$을 가지면 극값을 가지지 않으니 배제하고, $f(x)-2x+x^2$이 $a(x-1)^3$이겠죠? 이제 극값 조건을 사용하면 $a=-\frac{1}{3}$임을 알 수 있습니다.

14번: 아마 가장 까다로운 문항이 아니었나 싶어요. 다만 할 것들만 제대로 한다면(계산은 고되겠지만) 어렵지 않았을 겁니다. 외접원의 길이의 비로 BE와 DE의 길이의 비를 알 수 있고, 이등변삼각형 조건으로 BEC의 cos값을 효율적으로 나타낼 수 있게 됩니다. 이제 코사인 법칙을 두 번 사용해주면 BC의 길이는 $4\sqrt{6}$, BE의 길이는 $2\sqrt{6}$임을 알 수 있습니다.

15번: 9평 15번 급은 아니지만 어렵지는 않았을 겁니다. $f'(x)$를 기울기가 6인 직선으로 바라보고, $x=0$에서 미분가능하지 않고 $F(x)$와 $f'(x)$가 $x=2$에서 만나는데 $x=2$에서는 미분가능하게 된 이유를 고민해보면 풀리는 문제입니다. $F(x)=x(x-2)^2+6x-8$이 나오겠죠?

16번: $x-2$나눠주시고 $x=2$대입하면 답은 12입니다.

17번: 그냥 x^2-ax+b의 두 실근이 3, 7이니까 $a=10, b=21$입니다.

18번: $\sum_{k=1}^{10} k^2=385$, $\sum_{k=1}^{10} 2k=110$이므로, $a=6$이어야 합니다.

19번: 기울기가 12인 접선이 원점을 지나야 하므로 $f(1)=12$입니다. 이로부터 $f(x)=x^4+4x^2+7$임을 알 수 있습니다.

20번: $\frac{1}{3}+\frac{5}{n}$이 1보다 큰지 작은지에 따라 부등호의 방향이 바뀝니다. 어차피 지수를 비교하는 부등식은 이차부등식이니, 공통 범위를 잘 따져 준다면

$n=1$, 2, 3(이 경우, $\frac{1}{3}+\frac{5}{n}<1$입니다.)

8, 9(이 경우, $\frac{1}{3}+\frac{5}{n}>1$입니다.)

가 가능함을 알 수 있습니다.

21번: 14번 다음으로 까다로운 문항이었을 겁니다. 각각의 식의 형태에는 이유가 있다는 믿음을 갖고, 공차를 d라 했을 때 $b_7=a_4^2-4d^2$, $b_{10}-2b_5=50da_3$으로 나타낼 수 있어야 합니다. 이차방정식을 계산해주면 $d=\frac{3}{2}, a_3=\frac{7}{2}$임을 알 수 있고, $a_{40}=59$입니다.

22번: (가)조건에 의해 삼차식이 삼중근을 가짐을 알 수 있어 $g(x)=4x+1$로 바로 결정이 됩니다. (나) 조건에 의해 $f(x)=(x-a)^2(x-b)^2+4x+1$로 작성이 가능하고, $f'(0)=0, f(0)=5$로부터, 9평 22번과 비슷한 다항식 처리 과정을 겪을 것입니다. $f(x)=(x+2)^2(x-1)^2+4x+1$임을 알 수 있습니다.

확통 23번: $900\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=200$입니다.

확통 24번: $8\times5\times{}_4\mathrm{C}_1=160$입니다.

확통 25번: $\mathrm{P}(-1.1\le Z\le1.2)$을 계산하시면 됩니다.

확통 26번: $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$임을 알 수 있습니다. 이로부터 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{5\times\mathrm{P}(B)}=\frac{1}{4}$입니다. 이제 $\mathrm{P}(A\cup B)=1$로부터 $\mathrm{P}(A)$의 값을 구할 수 있습니다.

확통 27번: 쉽습니다. $d=1$, $d=3$, $d=6$, $d=9$인 경우 각각에 대해 중복조합을 계산해주면 됩니다. ${}_3\mathrm{H}_6+{}_3\mathrm{H}_3+3+1$을 계산해주면 되죠?

확통 28번: 총 24가지의 숫자 중 2개를 고르니 23×12만큼의 조합이 있겠고, 여기서 또는 조건이니까 여사건을 이용하여 해결해야 겠죠? 전체에서 두 수의 합이 홀수인 500미만의 숫자들이 나오는 경우를 빼줘야 합니다. 백의 자릿수가 각각 (1, 1)인 것이 8가지, (1, 2)인 것이 20가지, (1, 3)인 것이 16가지, (2, 2)인 것이 8가지로 총 52가지가 나올 것입니다.

확통 29번:(나) 조건에 의해 $f(2)=4, f(4)=1$이거나 $f(2)=5, f(5)=2$입니다. $f(2)=4$이고 $f(4)=1$인 경우, $f(5)<f(3)<f(1)$이 되도록 ${}_5\mathrm{C}_3$을 해준 뒤, $1,3,5$를 고르는 경우은 1가지를 빼주어서 총 9가지가 가능하고, $f(2)=5, f(5)=2$인 경우 $f(3), f(1)$이 각각 $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,5)$인 경우로 나누어 주심 됩니다. 총 14가지 경우가 나올 것입니다.

확통 30번: 쉽습니다. 답은 $\frac{162}{223}$입니다. 2가 나온 경우, 2개 뽑아서 최대가 5일 확률은 $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$이고, 3이 나온 경우의 확률은 $\frac{48+12+1}{216}=\frac{61}{216}$입니다. 따라서 $\frac{\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{61}{216}}=\frac{162}{223}$

미적분 23번: 유리화를 시켜주면 답은 $\frac{3}{4}$임을 알 수 있습니다.

미적분 24번: 미분해주시면 $2x+e^{y-1}y'+y+xy'=0$이고, 대입을 통해 계산해주면 답은 $-\frac{5}{3}$입니다.

미적분 25번: a_{2n}, a_{3n-2}각각이 등비수열이므로, 공식을 적용해주면 됩니다. 공비가 $-\frac{1}{2}$이고, 첫째항은 9입니다.

미적분 26번: $x+\frac{1}{1+x^2}=\frac{11}{5}$을 만족시키는 x는 2이기에 $f(3)=2$입니다. 또한, 미분을 통해 $g'\left(\frac{11}{5}\right)=\frac{1}{f'(3)-\frac{2f(3)f'(3)}{\{f(3)^2+1\}^2}}=\frac{5}{3}$임을 알 수 있습니다.

미적분 27번: 이 문제는 그냥 $\ln(1-3x)$는 $-3x$, $1-\cos\pi x$는 $\frac{\pi^2(x-2)^2}{2}$으로 고칠 수 있다는 것을 안다면, 쉽게 $f(x)$를 작성할 수 있습니다.

미적분 28번: 아마 미적분 중에서는 가장 어려운 문제이면서도 재미있는 문제가 아닐까 하네요. 합성함수를 미분가능하게 하기 위한 2가지 방법이 녹아져 있습니다. 대단히 중요한 문제입니다. $h(x)$가 만약 미분가능하다면, $x=2$에서 미분가능하지 않게 되니, $h(x)$는 $x=0$에서 미분 불가능해야 하며 즉 a와 b는 서로 다른 양수입니다. 근데 $x=2$를 전후해서 $x=2-$에서는 $\frac{x}{x^2+a}$에 합성을 하고, $x=2+$에서 $\frac{x}{x^2+b}$에 합성을 합니다. 그런데 $x=2-$일 때에는 $x-2$, $x=2+$에서는 $3x-6$이므로 $\frac{x}{x^2+a}$의 $x=0$에서의 미분계수는 $\frac{x}{x^2+b}$의 $x=0$에서의 미분계수의 3배입니다. 즉 $3a=b$입니다.

그리고 $xf(x)-2$는 최고차항의 계수가 음수인 삼차함수이고 $h(0)=-2$이므로 $xf(x)-2$는 $p(x-a)^3$, 즉 삼중근 형태를 가져야함을 알 수 있습니다.

이로부터 $xf(x)-2=-\frac{1}{4}(x+2)^3$임을 알 수 있습니다.

미적분 29번: 일단 $g(x)$라는 함수는 순전히 $f(x)$의 값에만 의존함을 파악하셔야 합니다. $f(x)$가 -2, 2가 되는 순간을 경계로 값이 바뀌는데, 극한값이 존재하는데 불연속이려면 $f(x)$의 최솟값이 -2이어야 함을 알 수 있습니다. 나머지 자잘한 계산을 통해 $f(x)=\frac{1}{12}x^2-2$임을 알 수 있습니다.

미적분 30번: 계산 문제이기는 하나, 최대한 귀찮은 계산은 뒤로 미루셔야 합니다. 각각의 교점을 $a, b(a<b)$라고 하면 $a+b=\tan\theta+2$, $ab=1$입니다. 그리고 R, S의 좌표도 각각 $\frac{a+1}{2}$, $\frac{b+1}{2}$로 나타낼 수 있고, 이들을 통해 계산하면 $T(\theta)=\frac{\tan^2\theta+4\tan\theta}{2}\sec\theta$로 나타낼 수 있죠. 답은 $\frac{81}{16}$입니다.

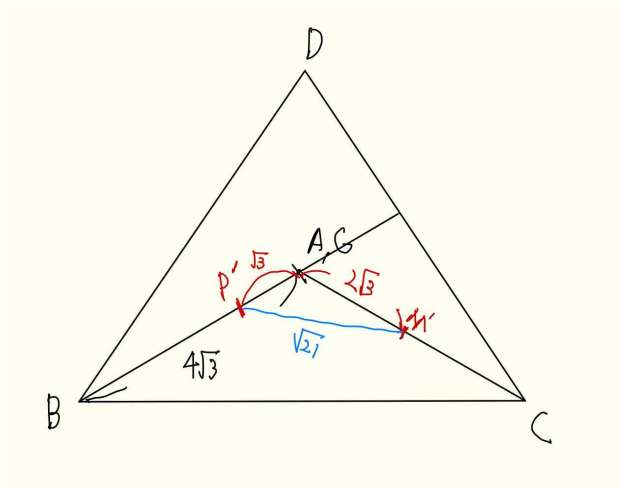
기하 23번: 답은 $\sqrt{4+5}=3$입니다.

기하 24번: x축 대칭이동은, x빼고 다 바꾸면 됩니다. 답은 3입니다.

기하 25번: $\vec{a}+2\vec{b}$의 크기가 $\sqrt{13}$임을 준 것이죠? 제곱 후 $-8\vec{a}\cdot\vec{b}$를 계산해주면 답은 $\sqrt{37}$입니다.

기하 26번: 타원이므로 둘레의 길이는 20이므로, 점 P의 y좌표는 $2\sqrt{3}$이 됩니다. 이를 대입하면 x좌표를 구할 수 있게 됩니다. 답은 $\frac{5}{2}$입니다.

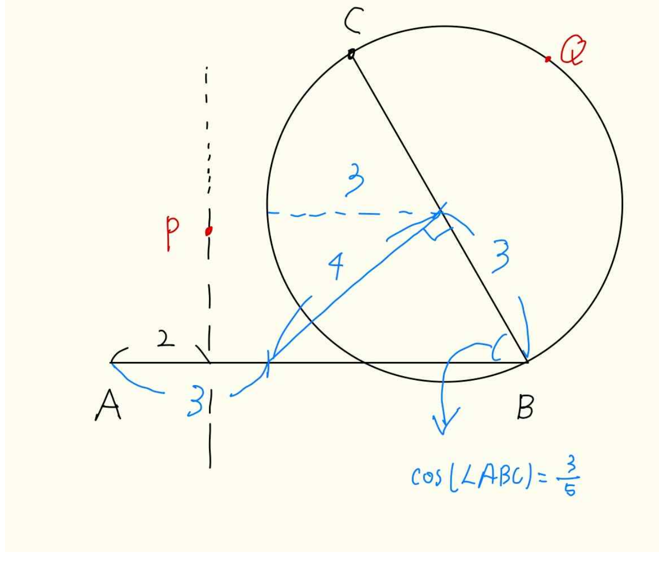
기하 27번: 위에서 본 그림을 그려주시면 됩니다.



보시는 바와 같이 AP'M'은 한 각이 $\frac{2}{3}\pi$이고,

다른 두 변의 길이가 $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$인 삼각형입니다.

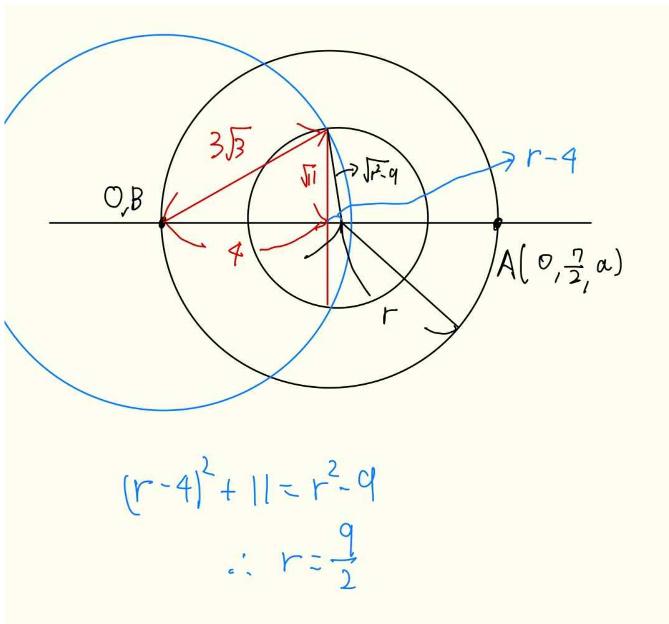
기하 28번: 비교적 쉬운 (나)에 대한 해석을 먼저 하자면, A, B를 3:5로 내분하는 점(D라 합시다)과 Q까지의 거리의 최댓값이 7이라는 의미입니다. 즉, BC를 지름으로 하는 원 위를 움직이는 점 Q이기에, BC의 중점을 M이라 하면, DM의 길이와 MC의 길이의 합이 7이라는 의미이죠. 그리고 (가)조건이 조금 어려웠을 것인데... 핵심은 저희는 y좌표 성분은 마음대로 조절 가능하다는 것입니다. 그런데 최솟값을 묻고 있으니, x성분만을 체크해주면 되겠죠. 만약 A의 x좌표를 0이라 한다면, 점 Q가 x좌표가 최소인 순간의 x좌표는 $\frac{16}{5}$이 됩니다. 그림으로 나타내면 다음과 같습니다.



이를 통해 AC의 길이의 제곱을 구하면(코사인 법칙) 답은 $\frac{212}{5}$입니다.

기하 29번: 접선식만 잘 세워주면 큰 어려움은 없었을 것입니다. 일단 $p=\frac{7}{8}$까지는 어렵지 않게 오셨을 것입니다. 그리고 $y^2=4x$에 대한 접선공식인 $y=mx+\frac{1}{m}$을 다른 포물선 식에 대입하여 판별식을 쓰면, 계산 과정은 복잡하나 어렵지 않게 29라는 답을 구할 수 있을 것입니다.

기하 30번: 단면화가 핵심입니다. OB와 평행한 시선으로 단면화하면 다음과 같습니다



이를 통해, OA의 길이가 9임을 알 수 있습니다.

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2024학년도 수능 대비 지인선 모의고사 1회 문제지

제 2 교시

수학 영역

짝수형

5지선다형

1. $\left(\frac{4^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{5}}}\right)^{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

$2^{8-5} = 8$

2. 함수 $f(x)=x^3-2x^2+4x-8$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$3-4+4=3$

3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_6-a_3=a_2,\quad 2a_7-a_9=18$$

일 때, a_{10}의 값은? [3점]

① 30 ② 33 ③ 36 ④ 39 ⑤ 42

$3d=a_2$ $a_7=8d$ $a_9=10d$

$6d=18$

$\therefore d=3$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & (x<a) \\ 2x+a & (x\geq a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

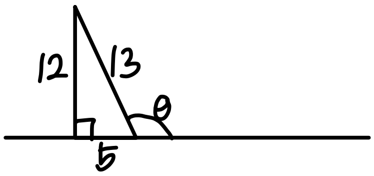
$a^2-4=3a$

$\rightarrow a=4$

5. $\cos(\pi-\theta)>0$이고 $\sin\theta=\frac{12}{13}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{12}{5}$ ② $-\frac{5}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{5}{13}$ ⑤ $\frac{12}{5}$

$\cos\theta<0$



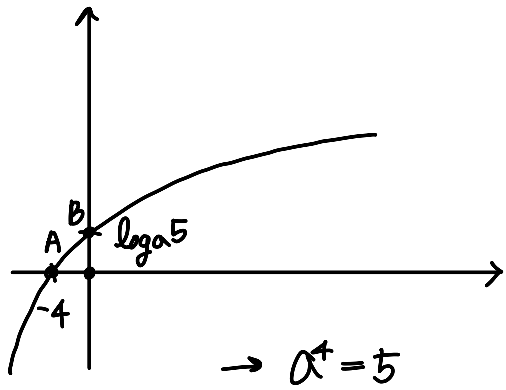
6. 좌표평면 위의 두 곡선 $y=x^3+4x^2+3x$와 $y=x^3+x^2+15x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 24 ② 28 ③ 32 ④ 36 ⑤ 40

$3x^2-12x=3x(x-4)$

7. 상수 $a(a>1)$에 대하여 좌표평면 위의 곡선 $y=\log_a(x+5)$가 x축과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB가 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$인 이등변삼각형일 때, a의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $5^{\frac{1}{4}}$ ② $5^{\frac{1}{5}}$ ③ $5^{\frac{1}{6}}$ ④ $6^{\frac{1}{4}}$ ⑤ $6^{\frac{1}{5}}$



$\rightarrow a^4=5$

$a=\boxed{5^{\frac{1}{4}}}$

8. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x)=12-f(-1)x^2$$

이고 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 k을 갖는다. k의 값은? [3점]

① 26　② 27　③ 28　④ 29　⑤ 30

$f(-1)=3$

$f(x)=(12x-x^3)-(-12+1)+3$

$=12x-x^3+14$

$f(2)=24-8+14=\boxed{30}$

9. 연속함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt=\begin{cases} g(x) & (x<1) \\ x^2-x & (x\ge 1) \end{cases}$$

이다. $f(-1)+g(2)$의 값은? [4점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

$g(0)=0$, $g(1)=0$

$x=1$ 에서 미가 → $g'(1)=1$

$g(x)=x^2(x-1)$

$g(2)=4$

$f(x)=\begin{cases} 3x^2-2x & (x<1) \\ 2x-1 & (x\ge 1) \end{cases}$

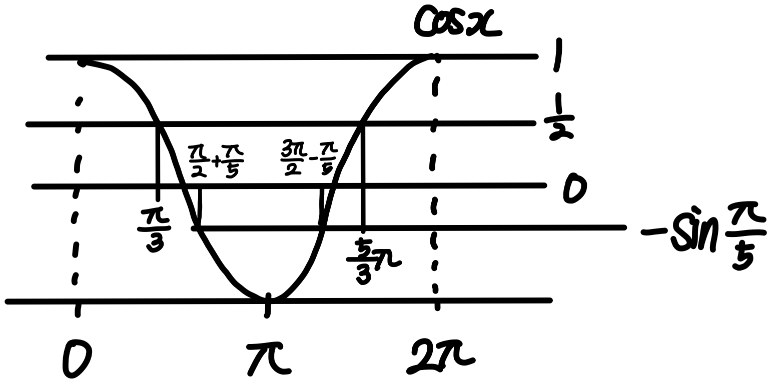
$f(-1)=\boxed{5}$

10. $0<x<2\pi$인 실수 x에 대하여 부등식

$$(2\cos x-1)\times\left(\cos x+\sin\frac{\pi}{5}\right)\le 0$$

를 만족시키는 x의 값의 범위는 $\alpha\le x\le\beta$또는 $\gamma\le x\le\delta$일 때, $\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta$의 값은? (단, $\alpha<\beta<\gamma<\delta$이다.) [4점]

① 12π　② $\frac{123}{10}\pi$　③ $\frac{63}{5}\pi$　④ $\frac{129}{10}\pi$　⑤ $\frac{66}{5}\pi$



$\frac{\pi}{3}+\pi+\frac{2\pi}{5}+\frac{9\pi}{2}-\frac{3\pi}{5}+\frac{20\pi}{3}$

$=8\pi-\frac{\pi}{5}+\frac{9\pi}{2}=\frac{80-2+45}{10}\pi$

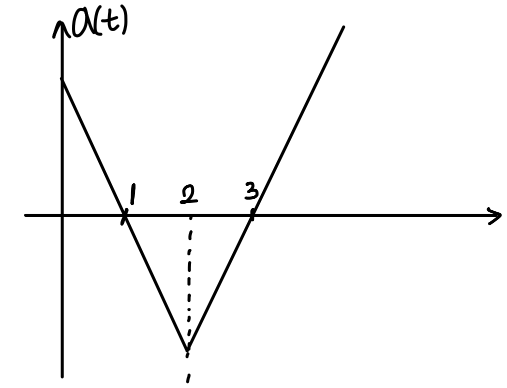
$=\boxed{\frac{123\pi}{10}}$

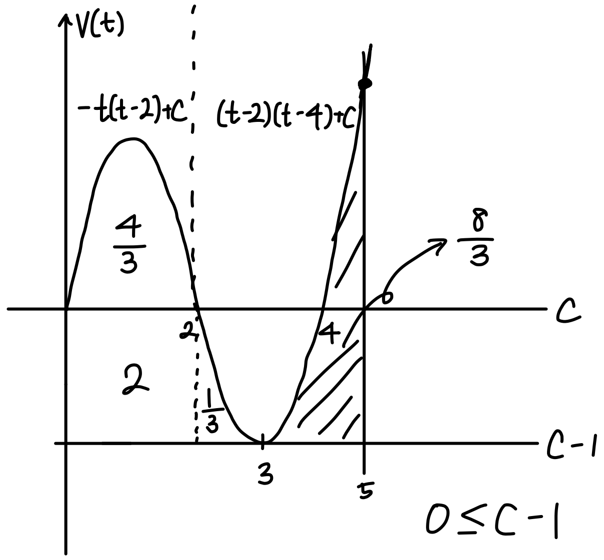
11. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \ge 0)$에서의 가속도 $a(t)$는

$$a(t)=\begin{cases} 2-2t & (0 \le t < 2) \\ 2t-6 & (t \ge 2) \end{cases}$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동방향이 바뀌지 않을 때, $t=5$에서 점 P의 위치의 최솟값은? [4점]

① $\frac{17}{3}$ ② 6 ③ $\frac{19}{3}$ ④ $\frac{20}{3}$ ⑤ 7





$0 \le C-1$

$\frac{13}{3}+2=\boxed{\frac{19}{3}}$

12. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(a_n-a_3)(a_n-a_6)=0$이면 $a_{n+1}=a_n-n$이다.
(나) $(a_n-a_3)(a_n-a_6)\neq 0$이면 $a_{n+1}=a_n+3$이다.

$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=26$일 때, $a_1+a_2+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}$의 값은? [4점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

n: 3 4 5 6 7

a_3 a_3-3 a_3 a_6 a_6-6

$a_6 = a_3-5$, $a_6-6 = a_3-11$

($a_3-3=a_6$은 수식을볼 때 뭘 더하고 빼도 만들 수 X)

$a_3+(a_3-3)+a_3+(a_3-5)+(a_3-11)$
$=5a_3-19=26$
$\rightarrow a_3=\frac{45}{5}=9$, $a_6=4$

n: 1 2 3 ... 7 8 9 10 11

3 6 9 ... -2 1 4 -5 -2

$\boxed{7}$

13. 최고차항의 계수가 음수이고 극솟값이 $-\frac{1}{3}$인 삼차함수 $f(x)$와 상수 k가

$$\lim_{x\to k}\frac{\{f(x)-1\}\times\{f(x)-2x+x^2\}}{(x-k)^4}=0$$

을 만족시킨다. $f(-5)$의 값은? [4점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

$(x-k)^{5}$↑ 인수를 가져야 함
→ 각 함수에 적어도 인수가 2개 이상
→ 극대점 $(k, 1)$
$f(x)-2x+x^2=p(x-k)^3$

$f(x)=p(x-k)^3-x^2+2x$

$f'(x)=3p(x-k)^2-2x+2$

$f'(k)=-2(k-1)=0 \quad \therefore k=1$

$f'(x)=(x-1)(3p(x-1)-2)$

↓

$x=1+\frac{2}{3p}$ 에서 함숫값 $-\frac{1}{3}$

$f(1+\frac{2}{3p})=p(\frac{2}{3p})^3-(\frac{2}{3p})^2+1$

$=\frac{8}{27p^2}-\frac{4}{9p^2}+1=-\frac{1}{3}$

$\frac{-4}{27p^2}=-\frac{4}{3}$

$p=\frac{-1}{3}$

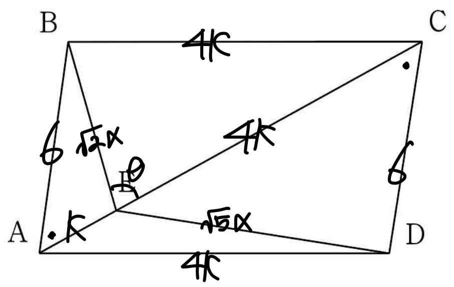
$f(-5)=\frac{-1}{3}(-5-1)^3-25-10$

$=2\times36-35=72-35$

$=\boxed{37}$

14. 그림과 같이 $\overline{AB}=6$인 평행사변형 ABCD에 대하여, 선분 AC를 $1:4$로 내분하는 점을 E라 하면 $\overline{BC}=\overline{CE}$이다. 삼각형 CDE의 외접원의 넓이는 삼각형 ABE의 외접원의 넓이의 $\frac{5}{2}$배일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]

① $12\sqrt{15}$ ② $13\sqrt{15}$ ③ $14\sqrt{15}$ ④ $15\sqrt{15}$ ⑤ $16\sqrt{15}$



$\frac{\overline{BE}^2}{4\sin^2\cdot}:\frac{\overline{DE}^2}{4\sin^2\cdot}=2:5$

$\overline{BE}:\overline{DE}=\sqrt{2}:\sqrt{5}$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}\alpha}{8k}$

$36=k^2+2\alpha^2+2\sqrt{2}\alpha k\times\frac{\sqrt{2}\alpha}{8k}$

$36=k^2+2\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2}$

$\cos\cdot=\frac{16k^2+36-5\alpha^2}{2\times4k\times6}$ $(\triangle CDE)$

$=\frac{k^2+36-2\alpha^2}{2\times k\times6}$ $(\triangle ABE)$

↓

$16k^2+36-5\alpha^2=4(k^2+36-2\alpha^2)$

$12k^2-3\times36+3\alpha^2=0$

$k^2-9+\frac{\alpha^2}{4}=0$

$27=\frac{-\alpha^2}{4}+2\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2}$

$4\times27=(-1+8+2)\alpha^2$

$12=\alpha^2 \quad 6=k^2 \rightarrow \cos\cdot=\frac{18}{12\sqrt{6}}$

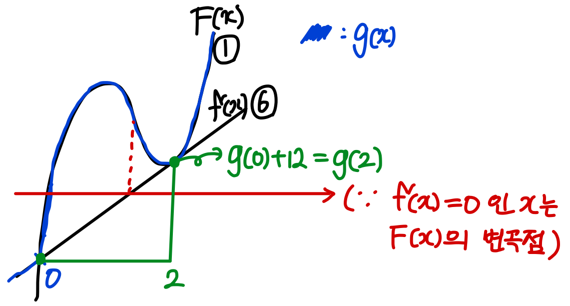
$\sin\cdot=\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{6}}$

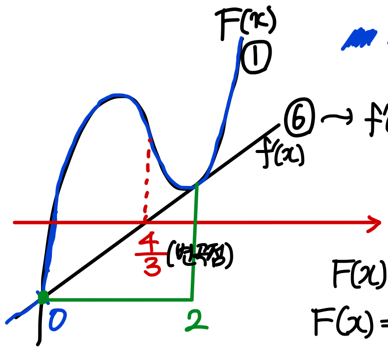
$\frac{1}{2}\times2\times6\times5\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{6}}=\boxed{15\sqrt{15}}$

15. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자. $F(x)$와 $f'(x)$ 중 작지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, $g(2)=g(0)+12$이고 $g(x)$는 $x=0$에서만 미분가능하지 않다. $f(4)+g(3)$의 값은? [4점]

① 36　② 39　③ 42　④ 45　⑤ 48

$\max\{F(x), f'(x)\}$





⑥ → $f'(x)=6(x-\frac{4}{3})$
$=6x-8$

$F(x)-f'(x)=x(x-2)^2$
$F(x)=x(x-2)^2+6x-8$
$f(x)=(x-2)^2+2x(x-2)+6$
$f(4)=4+16+6=26$
$g(3)=F(3)=3+10=13$

$\boxed{39}$

단답형

16. $\lim_{x \to 2} \frac{4x^3-32}{x^2-4}$의 값을 구하시오. [3점]

$\lim_{x \to 2} \frac{4\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \boxed{12}$

17. 부등식 $4^x - a \times 2^x + b \le 0$의 해가 $\log_2 3 \le x \le \log_2 7$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

$2^x=t$ 라 하면
$3 \le 2^x = t \le 7$

$t^2-at+b \le 0$ 의 해가
$3 \le t \le 7$

→ $a=10$, $b=21$

$\boxed{31}$

18. $\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k+a)=555$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$385+110+10a=555$

$495+\underbrace{10a}_{=60}=555$

$\therefore a=\boxed{6}$

19. 도함수가 $4x^3+8x$인 함수 $f(x)$에 대하여 좌표평면 위의 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선이 오직 두 개의 사분면만을 지난다. $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

접선: $12(x-1)+f(1)$

이 $(0,0)$을 지나야 두 개의 사분면만.

$\rightarrow f(1)=12$

$f(x)=x^4+4x^2+7$

$\boxed{39}$

20. 부등식

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{n}\right)^{14n}<\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{n}\right)^{n^2+40}$$

을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

Case 1. $\frac{1}{3}+\frac{5}{n}<1$

$\frac{15}{2}<n$ ⇝ n이 8 이상일 때

$14n>n^2+40$

$8\leq n<10$ $n=8, 9$

Case 2. $\frac{1}{3}+\frac{5}{n}>1$

$\frac{15}{2}>n$ ⇝ n이 7 이하일 때

$14n<n^2+40$

$n<4$

$n=1, 2, 3$

$\boxed{23}$

21. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $b_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k \times a_{n+1-k})$이다.

$$b_7 = 112, \quad b_{10} - 2b_5 = \frac{525}{2}$$

일 때, a_{40}의 값을 구하시오. [4점]

$b_7 = a_1 \times a_7 + a_2 \times a_6 + a_3 \times a_5 + (a_4)^2 + \cdots$ (대칭)

$= 2((a_4)^2 - 9d^2) + 2((a_4)^2 - 4d^2) + 2((a_4)^2 - d^2) + (a_4)^2$

$= 7(a_4)^2 - 28d^2 = 112$

$(a_4)^2 - 4d^2 = 16$

$b_{10} = (a_1 \times a_{10} + a_2 \times a_9 + \cdots + a_5 \times a_6) \times 2$

$-)\ 2 \times b_5 = (a_1 \times a_5 + a_2 \times a_4 + a_3 \times a_3 + a_4 \times a_2 + a_5 \times a_1) \times 2$

$b_{10} - 2b_5 = 10d(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$

$= \cancel{50}\,10\, d a_3 = \frac{\cancel{525}\ 105}{2}$

$a_3 = \frac{21}{4d} \rightarrow d \times a_3 = \frac{21}{4}$

$(a_3 + d)^2 - 4d^2$

$= (a_3)^2 + \frac{21}{2} - 3d^2 = 16$

$\rightarrow (a_3)^2 - 3d^2 = \frac{11}{2}$

$22 d a_3 = \frac{21 \times 11}{2}$

$21(a_3)^2 - 63d^2 = \frac{21 \times 11}{2}$

$= 22 d a_3$

(상수항 없애고 문자 두개 관계 찾기)

$21(a_3)^2 - 22 d a_3 - 63 d^2$

$= (7a_3 + 9d)(3a_3 - 7d) = 0$

$a_3 = \frac{7d}{3} \Rightarrow d^2 = \frac{9}{4}$

$d = \frac{3}{2},\ a_3 = \frac{7}{2}$

$a_{40} = \frac{7 + 111}{2} = \frac{118}{2}$

$= \boxed{59}$

8 / 20

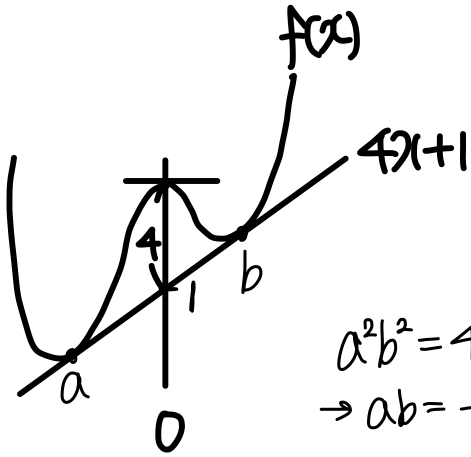
22. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0) = 0$, $f(0) = 5$인 사차함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $|x^3 + 3x^2 - x + g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
$= (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
$g(x) = 4x + 1$

(나) 집합 $\{x \mid g(x) \ge f(x)\}$의 원소의 개수는 2이다.

→ $g(x) = f(x)$의 x 개수는 2, $g(x) < f(x)$ 가 대부분

$f(2) + g(\cancel{10})$의 값을 구하시오. [4점]
41



$a^2 b^2 = 4$

$\rightarrow ab = -2$

$f(x) - 4 = 4(x-a)(x - \frac{a+b}{2})(x-b)$

$x = 0$ 대입

$+1 = +\frac{a+b}{2} \times ab$

$a + b = -1$

$a - \frac{2}{a} = -1$

$a^2 + a - 2 = 0$

$a = -2$

$b = 1$

$f(2) = 9 + (2-a)^2(2-b)^2$

$= 25$

$\boxed{66}$

제 2 교시

수학 영역(미적분)

짝수형

5지선다형

23. $\lim_{n \to \infty}\left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

$\lim_{n \to \infty}\sqrt{(2n+\frac{3}{4})^2+\sim}-2n = \boxed{\frac{3}{4}}$

24. 곡선 $x^2+e^{y-1}+xy=7$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

$2x+e^{y-1}y'+y+xy'=0$

$4+y'+1+2y'=0$

$y'=\boxed{-\frac{5}{3}}$

25. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = -6, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{3n-2} = 8$$

을 만족시킨다. a_1의 값은? [3점]

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

$$a_2 \times \frac{1}{1-r^2} = -6 \quad a_1 \times \frac{1}{1-r^3} = 8$$

$$r\frac{1-r^3}{1-r^2} = -\frac{3}{4}$$

$$-4r(1+r+r^2) = 3(1+r)$$

$$4r^3+4r^2+7r+3=0$$

$$r=-\frac{1}{2}$$

$$a_1 = \boxed{9}$$

26. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)+\dfrac{1}{\{f(x)\}^2+1}$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $g\left(\dfrac{11}{5}\right)=3$, $f'(3)=\dfrac{5}{7}$일 때, $g'\left(\dfrac{11}{5}\right)$의 값은? [3점]

① $\dfrac{2}{3}$ ② 1 ③ $\dfrac{4}{3}$ ④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ $\dfrac{6}{3}$

$$f(3)+\frac{1}{\{f(3)\}^2+1} = \frac{11}{5}$$

$$f(3)=2$$

$$\frac{1}{f'(3)+\dfrac{-2f(3)f'(3)}{\{(f(3))^2+1\}^2}} = \frac{1}{\frac{5}{7}-\frac{4f'(3)}{25}}$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{7}-\frac{4}{5}\times\frac{1}{7}}$$

$$= \frac{35}{21} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

27. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)}{\ln(1-3x)}\right\}=3,\quad \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{1-\cos\pi x}=0$$

을 만족시킨다. $f(4)$의 값은? [3점]

$f(x)=(x-2)^3(ax+b)$

① 12 ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{-3x}=3 \rightarrow f(0)=0,\ f'(0)=-9$$

$f(x)=(x-2)^3(ax)$

$-8a=-9$

$f(x)=\frac{9}{8}x(x-2)^3$

$f(4)=\boxed{36}$

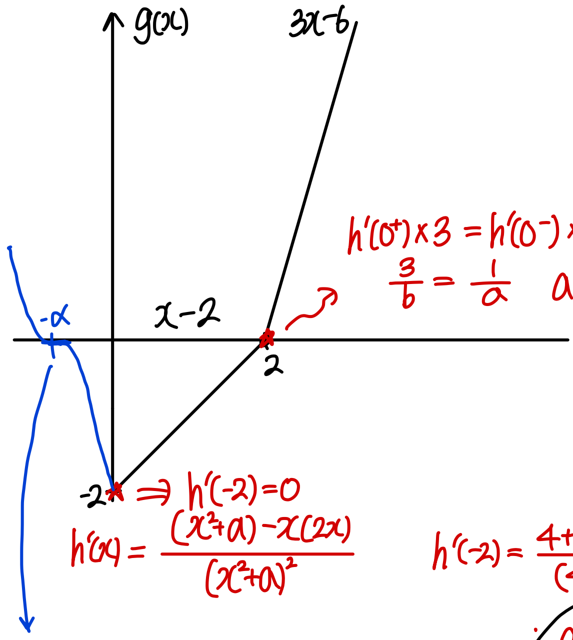
28. 최고차항의 계수가 음수이고 $f(0)=-3$인 이차함수 $f(x)$와 두 양수 a, b에 대하여 함수 $g(x)$, $h(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} xf(x)-2 & (x<0) \\ x-2 & (0\le x<2), \\ 3x-6 & (x\ge2) \end{cases}\qquad h(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x^2+a} & (x<0) \\ \dfrac{x}{x^2+b} & (x\ge0) \end{cases}$$

→ 최고차항 계수 ⊖인 삼차.

으로 정의하자. 함수 $h(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b+f(2)$의 값은? [4점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13



$h'(0^+)\times3=h'(0^-)\times1$

$\frac{3}{b}=\frac{1}{a}$ $a:b=1:3$

$-2 \Rightarrow h'(-2)=0$

$$h'(x)=\frac{(x^2+a)-x(2x)}{(x^2+a)^2}$$

$$h'(-2)=\frac{4+a-8}{(4+a)^2}=0$$

$\therefore a=4,\ b=12$

x축과 만나는 순간에 미분계수 0

$xf(x)-2=p(x-\alpha)^3$

$\alpha^3p=2$

$f(0)=3p\alpha^2=-3$

$p\alpha^2=-1$

$\alpha=-2$

$p=-\frac{1}{4}$

$2f(2)-2=-\frac{1}{4}(2+2)^3$

$=-16$

$f(2)=-7$

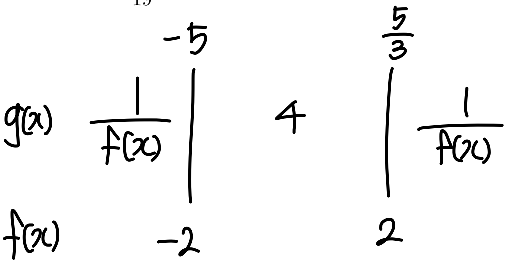
$\boxed{9}$

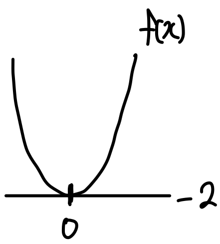
단답형

29. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(x)\}^{2n}+4^{n+1}}{\{f(x)\}^{2n+1}+4^{n}}$$

이라 하자. 양의 상수 k에 대하여 $\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)+k$이고 $g(k)=\frac{4}{19}$일 때, $f(12)$의 값을 구하시오. [4점]





$\Rightarrow k=9$

$g(9)=\frac{1}{f(9)}=\frac{4}{19}$

$f(9)=\frac{19}{4}$

$-2+81p=\frac{19}{4}$

$81p=\frac{27}{4}\rightarrow p=\frac{1}{12}$

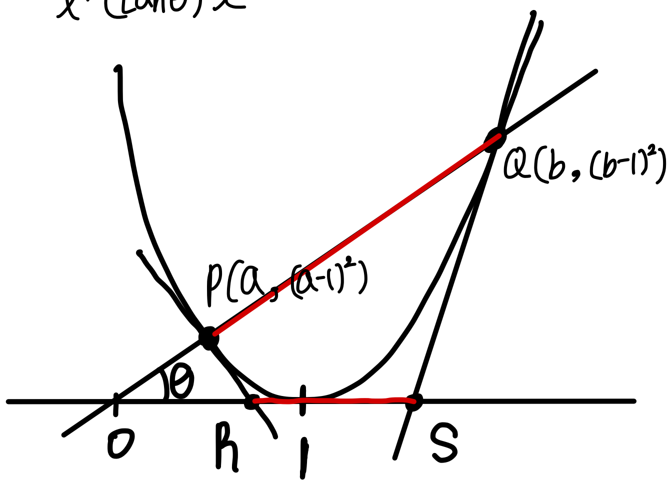
$12-2=\boxed{10}$

30. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 원점을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선 l이 있다. 직선 l과 곡선 $y=(x-1)^2$이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하고, 점 P에서 $y=(x-1)^2$에 접하는 직선이 x축과 만나는 점을 R, 점 Q에서 $y=(x-1)^2$에 접하는 직선이 x축과 만나는 점을 S라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{RS}}=T(\theta)$라 하자. $\tan\alpha=\frac{1}{2}$인 α에 대하여

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\frac{T(\theta)}{\cos\theta}d\theta=\frac{q}{p}$$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$l:(\tan\theta)x$



$x^2-2x+1=\tan\theta x$

$a+b=\tan\theta+2$

$ab=1$

$\rightarrow b-a=\sqrt{(\tan\theta+2)^2-4}=\sqrt{\tan^2\theta+4\tan\theta}$

$\overline{PR}: 2(a-1)(x-a)+(a-1)^2 \rightsquigarrow R(\frac{a+1}{2},0)$

$\overline{QS}: 2(b-1)(x-b)+(b-1)^2 \rightsquigarrow S(\frac{b+1}{2},0)$

$\overline{RS}=\frac{b-a}{2}$

$T(\theta)=\frac{\tan^2\theta+4\tan\theta}{2}(\sec\theta)$

$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\frac{\tan^2\theta\sec^2\theta}{2}+2\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta$

$\tan\theta=t$로 치환

$\int_{\tan\alpha}^{\frac{1}{\tan\alpha}}\frac{t^2}{2}+2t\,dt=\frac{t^3}{6}+t^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{1}{6}(8-\frac{1}{8})+4-\frac{1}{4}=\frac{81}{16}$ $\boxed{97}$