*: 함정성 *: 고난이도 *: 신유형

<1학년 1학기 수학 상 기말 문제지>

(총 19문항 96점-객관식 15문항 70점, 서술형 4문항 26점)

3

1. $|x+1|+|x-1| \le 8$을 만족하는 정수 $x$의 개수는? [4.3점]

① (i) $x<-1$: $-x-1-x+1\le 8$, $x\ge -4$

(ii) $-1\le x\le 1$: 상상성립

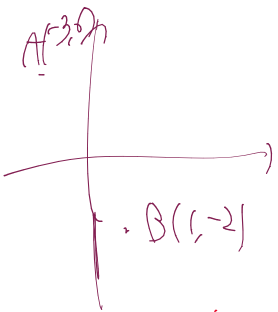
(iii) $x>1$: $x+1+x-1\le 8$, $x\le 4$

$-4\le x\le 4 \to 9$개

X 5

2. 두 점 $A(-3,6), B(1,-2)$가 있다. 점 $P$가 $x$축 위를 움직일 때, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은? [4.4점]

① $A(-3,6)$, $B(1,-2)$




* 주의: 대칭이동 하면 안됨

최솟값: P가 $\overline{AB}$ 위 → $\overline{AB}$

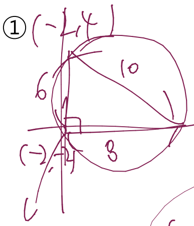
$\overline{AB}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$.

1

3. 세 점 $(-2,\ -2), (-2, 4), (6,\ -2)$를 모두 지나는 원의 방정식을 구하면 $x^2+y^2+ax+by+c=0$이다. 이때, $\frac{a}{b}\times c$의 값은? [4.5점]

$x=-2$.

① $(-2,4)$




$(6,-2)$ $y=-2$

수직.

→ 반지름 5, 중심 $\left(\frac{6-2}{2}, \frac{-2+4}{2}\right)=(2,1)$

$(x-2)^2+(y-1)^2=25$

$x^2+y^2-4x-2y-20=0$

$\frac{-4}{-2}\times(-20)=-40$

2

X

4. 선분의 내분점과 외분점에 관한 설명으로 아래에서 옳은 것을 모두 고르면? [4.6점]

| |
|---|
| ㄱ. 두 점 $(-3,4), (9,8)$을 1:1로 외분하는 점은 $(3,6)$이다.<br>ㄴ. $A(0,3), B(6,0)$에 대해 선분 $BA$를 1:2로 내분하는 점은 $(4,1)$이다.<br>ㄷ. 임의의 두 점 $A, B$에 대해 직선 $AB$ 위의 모든 점은 선분 $AB$의 내분점 또는 외분점이 될 수 있다. |

① ㄱ

ㄱ. 1:1로 외분: 존재X (X)

ㄴ. (순서주의) BA를 1:2로 내분 → (4,1)

AB를 1:2로 내분 → (2,2) (O)

ㄷ. 점 A와 B는 내분점 또는 외분점이

될 수 없다. (X)

∴ ㄴ

②

5. 점 $(a,b)$를 직선 $x-y+2=0$에 대해 대칭이동하였더니 점 $(2b,2a)$가 되었다. 이때, $a+b$의 값은? [4.4점]

①

① $\left(\frac{a+2b}{2}, \frac{b+2a}{2}\right)$는 $x-y+2=0$ 위의 점

② $\frac{2a-b}{2b-a}=-1$, $2a-b=-2b+a$, $b=-a$

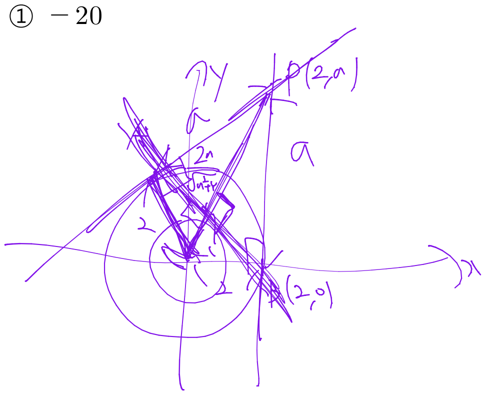
$\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$는 $x-y+2=0$ 위: $-a+2=0$

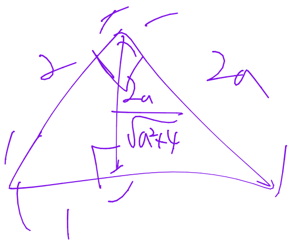
$a=2$, $b=-2$, $2a+3b=-2$

③

6. 점 $P(2,a)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접점을 각각 $A, B$라 할 때, 선분 $AB$는 원 $x^2+y^2=1$에 접한다. 이때, 모든 $a$값의 곱을 구하면? [4.8점]

① $-20$




$\frac{2a}{\sqrt{a^2+4}}=\sqrt{3}$

$4a^2=3a^2+12$

$a^2=12$

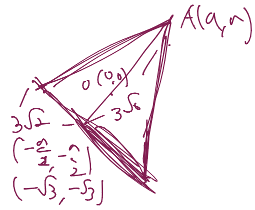
$a=\pm\sqrt{12}$.

곱: $-12$

④

7. 좌표평면 위의 점 $A(a,a)(a>0)$에 대해 $\triangle ABC$는 한 변의 길이가 $6\sqrt{2}$인 정삼각형이고, 무게중심은 원점이다. 두 점 $B, C$를 지나는 직선의 방정식은 $y=px+q$일 때, $p^2+q^2$의 값은? [4.7점]

①




$p=-1$,

$q=-2\sqrt{3}$

$a^2+a^2=24$, $a^2=12$, $a=2\sqrt{3}$

$p^2+q^2=13$

$y=-(x+\sqrt{3})-\sqrt{3}$

$y=-x-2\sqrt{3}$

⑤

8. $a>1$일 때,

연립이차부등식 $\begin{cases} x^2-(a+1)x+a<0 \\ x^2+(a-5)x-5a>0 \end{cases}$ 을

만족하는 정수 $x$의 개수가 2개가 되도록 하는 가능한 정수 $a$값의 합은? [4.5점]

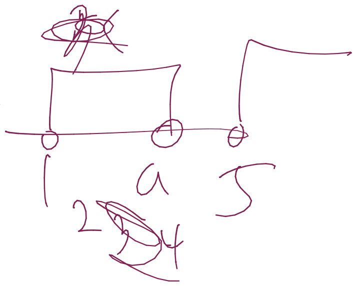
①

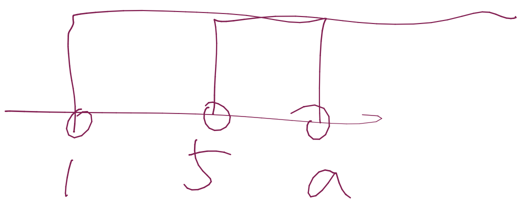
$(x-1)(x-a)<0$

$1<x<a$

$(x+a)(x-5)>0$

$x<-a$  $x>5$




개수: 6, 7

$8\geq a>7$.

~~9.~~ 5

9. 두 원 $(x+6)^2+(y+8)^2=4$ 위의 점 $(p, q)$와 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 위의 점 $(r, s)$가 있다. 이때, $\dfrac{q-2s}{p-2r}$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 하면, $Mm$의 값은? [4.8점]

①

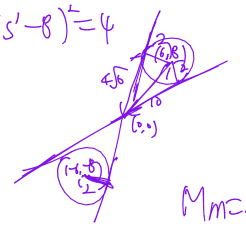
$(p, q)$ $(p+6)^2+(q+8)^2=4$

$(r, s)$ $(r-3)^2+(s-4)^2=1$

$(2r, 2s)$ $(2r-6)^2+(2s-8)^2=4$

$2r=r', 2s=s'$ $(r'-6)^2+(s'-8)^2=4$

$\dfrac{q-s'}{p-r'}$ : 기울기



접선 $y=mx$

$mx-y=0$

$\dfrac{|6m-8|}{\sqrt{m^2+1}}=2$, $|3m-4|=\sqrt{m^2+1}$

$9m^2-24m+16=m^2+1$

$8m^2-24m+15=0$ → 최대, 최소.

$Mm=\dfrac{15}{8}$

~~10.~~ 4

10. 세 점 $A(1, -2)$, $B(t, 0)$, $C(t+1, 2)$가 이등변삼각형일 때, 가능한 모든 실수 $t$값의 합은? [4.7점]

① (1) $\overline{AB}=\overline{AC}$

$(t-1)^2+4=t^2+16$, $-2t+5=16$, $t=-\frac{11}{2}$

(2) $\overline{AC}=\overline{BC}$

$t^2+16=5$, 실수 $t$ 없음 (X)

(3) $\overline{AB}=\overline{BC}$

$(t-1)^2+4=5$, $t-1=\pm1$, $t=0$ 또는 $t=2$

$t=0$ 일 때 : (O)

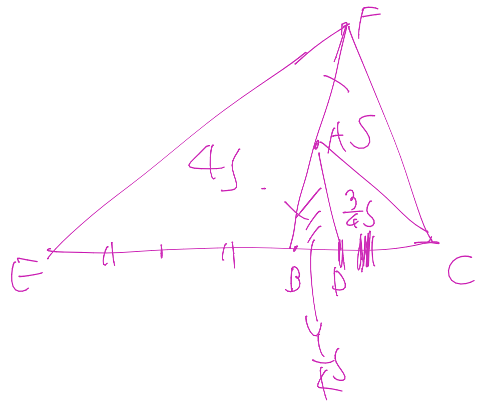
* $t=2$ 일 때 : 세 점 직선 위에 있다. (X)

따라서, 합은 $-\frac{11}{2}$.

4

11. 선분 $BC$를 1:3으로 내분하는 점을 $D$, 선분 $BC$를 2:3으로 외분하는 점을 $E$, 선분 $AB$를 1:2로 외분하는 점을 $F$라 하자. 삼각형 $BEF$의 넓이는 삼각형 $ABD$의 넓이의 $k$배이다. $k$의 값은? [4.9점]

①




$4S=\frac{1}{4}S\cdot16$

$k=16$

1

12. 직선 $mx-y-2m+1=0$은 항상 원 $C$의 넓이를 이등분한다. 이 원 $C$가 $x$축 또는 $y$축에 접하도록 하는 원 $C$의 가능한 반지름의 길이의 합은? [4.6점]

① 3

$y=m(x-2)+1$ → 항상 $(2, 1)$ 지남

$C$ : $(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$

$r=1$ 또는 $r=2$

합은 $\boxed{3}$

③

13. 정사각형 $OABC$의 외부에 $\overline{OP}=5$, $\overline{BP}=1$, $\overline{CP}=4$를 만족하는 점 $P$가 존재한다. 이때, 이 정사각형의 넓이는? [4.7점]

① 1

$(t>0)$ $O(0,0)$ $A(t,0)$ $B(t,t)$ $C(0,t)$ $P(x,y)$

$\overline{OP}^2 = x^2+y^2=25$

$\overline{BP}^2 = (x-t)^2+(y-t)^2=1$, $\overline{CP}^2 = x^2+(y-t)^2=16$

$y=\frac{t^2+9}{2t}$, $x=\frac{t^2+15}{2t}$

$t^4-26t^2+153=0$, $(t^2-9)(t^2-17)=0$

$t=3$, $t=\sqrt{17}$

$t=3$: $P(4,3)$ → 외부

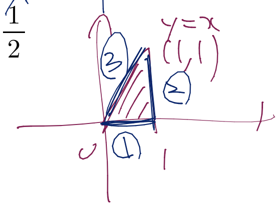
$t=\sqrt{17}$: $P(\frac{16}{\sqrt{17}}, \frac{13}{\sqrt{17}})$ → 내부

∴ $t=3$ → 넓이$=9$

②

14. 직선 $y=x$, $x$축 및 $x=1$로 둘러싸인 삼각형을 $f(x,y)=0$이라 하자. 이때, 도형 $f(x+y, x-y)=0$이 나타내는 도형의 넓이는? [5점]

① $\frac{1}{2}$




①: $0\le x\le 1$, $y=0$

→ $f(x,x)$ → $\boxed{Y=X}$

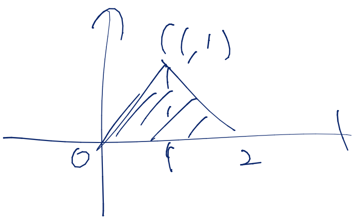
②: $x=1$, $0\le y\le 1$

→ $f(1+y, 1-y)$ → $\boxed{Y=-X+2}$

③ $y=x$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$

→ $f(2x,0)$ → $Y=0$ $(0\le X\le 2)$

내부의 점은 다시 내부에 위치함




넓이$=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$

②

15. 좌표평면 위에 직선 $l: y=mx+2$와 두 개의 원 $C_1: x^2+y^2=1$, $C_2: x^2+y^2=2$가 있다. 직선 $l$이 원 $C_1$과 공유점을 갖지 않고, 원 $C_2$와는 공유점을 가질 때, 직선 $l$이 원 $C_2$와 만나서 생기는 현의 중심 $(X, Y)$의 자취를 $(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2=1$ (단, $2Y^2+\gamma Y+\delta<0$)이라고 할 때, $\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값은? [5.1점]

① $-2$

$\frac{2}{\sqrt{m^2+1}} > 1$, $\frac{2}{\sqrt{m^2+1}} < \sqrt{2}$

$\sqrt{2} < \sqrt{m^2+1} < 2$, $1<m^2<3$

$y=mx+2$, $x^2+y^2=2$

$x^2+(mx+2)^2=2$, $(m^2+1)x^2+4mx+2=0$

두 실근 $p, q$ → $p+q=-\frac{4m}{m^2+1}$

교점 $(p, mp+2)$, $(q, mq+2)$

중점 $(\frac{p+q}{2}, \frac{m(p+q)}{2}+2)$

$X=\frac{p+q}{2}=-\frac{2m}{m^2+1}$, $Y=\frac{m(p+q)}{2}+2=\frac{2}{m^2+1}$

$X=-mY$, $X^2+(Y-1)^2=1$

$\frac{1}{2}<Y<1$, $2Y^2-3Y+1<0$

$\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=-3$, $\delta=1$, $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-1$

## <서술형 문제>

(총 4문제, 26점)- 모든 문제에 풀이 과정을 상세히 적으세요. 답만 적으면 점수가 거의 없습니다.

1. 두 직선 $mx+(m+1)y+2=0$, $(2m+1)x+(2m-2)y=4$가 한 점에서 만날 때, 두 직선의 교점을 지나면서 기울기가 $\frac{1}{4}$인 직선의 ~~y~~ $x$절편을 구하고, 그 과정을 서술하시오. [6점]

한 점에서 만나므로 $\frac{m}{m+1} \neq \frac{2m+1}{2m-2}$, $m \neq -\frac{1}{5}$

$k(mx+(m+1)y+2)+(2m+1)x+(2m-2)y-4=0$

기울기 $\frac{1}{4} \rightarrow -\frac{km+2m+1}{km+2m+k-2}=\frac{1}{4}$

$(5m+1)k=-2(5m+1)$, $k=-2$.

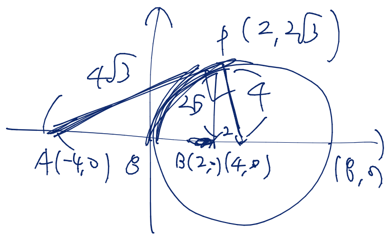
$2x-4y-8=0$, $x$절편 $4$

2. 두 점 $A(-4,0), B(2,0)$가 있고, 제 1사분면 위에 있는 점 $P$는 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$을 만족하며 움직인다. 이때, $\angle PAB$가 최대일 때 $P$의 좌표를 구하고, 그 과정을 서술하시오. [7점]

아폴로니우스의 원

→ (0,0)과 (8,0)을 양 끝점으로 하는 원

→ $(x-4)^2+y^2=16$ $(y>0)$




∠PAB: 접할 때 최대

→ $P(2, 2\sqrt{3})$

3. 실수 $a$에 대해, $x$에 대한 이차부등식 $(a-1)x^2+2(a-1)x+2>0$이 실수 $x$값에 관계없이 항상 성립한다. $a$의 범위를 구하고, 그 과정을 서술하시오. [5점]

(i) $a=1$ : 성립

(ii) $a\neq1$ : $D<0$

$(a-1)^2-2(a-1)<0$, $(a-1)(a-3)<0$

$1<a<3$

(i),(ii) → $\boxed{1\le a<3}$

4. 좌표평면 위에 세 점 $A(0,2)$, $B(-1,0)$, $C(1,0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $ABC$의 내부 또는 변 위의 점 $P$에서 변 $AB, BC, CA$까지의 거리를 각각 $a,b,c$라 하자. $5(a+c)^2=4b$가 성립할 때, 점 $P$의 자취를 구하는 과정을 서술하시오. [8점]

$P(x,y)$

$\overleftrightarrow{AC}$ : $y=-2x+2$

$\overleftrightarrow{AB}$ : $y=2x+2$.

$a=\dfrac{|2x-y+2|}{\sqrt5}$

$b=y$

$c=\dfrac{|2x+y-2|}{\sqrt5}$

내부 $\begin{cases} y<-2x+2 \\ y>0 \\ y<2x+2 \\ -1<x<1,\ 0<y<2 \end{cases}$

$5(a+c)^2=4b$

$(|2x-y+2|+|2x+y-2|)^2=4y$

$\begin{cases} |2x-y+2|=2x-y+2 \\ |2x+y-2|=-2x-y+2. \end{cases}$

$(-2y+4)^2=4y$, $(-y+2)^2=y$

$y^2-5y+4=0$, $y=1$ (삼각형의 내부)

$y=1$일 때, $x=-\frac12$, $\frac12$

$\therefore \boxed{y=1\ (-\tfrac12<x<\tfrac12)}$