이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족할 때 $f(2)$의 값을 구하시오.

(가) $f(1)=2$
(나) 실수 전체의 집합에서 $(f'(x)-f(x))(f'(x)-4+f(2-x))\leq 0$이다.

조건 (나)에서 $x=1$일 때 $(f'(1)-2)^2\leq 0$에서 $f'(1)=2$이다.

이때 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=4-f(2-x)$는 점 $(1,\ 2)$에 대하여 점대칭이다.

즉 조건 (나)에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(x)$이다.

다시 말해 점 $(1,\ 2)$를 지나며 기울기가 2인 직선의 방정식이 $y=f'(x)$이므로 $f'(x)=2x$이다.

이때 $f(1)=2$에서 $f(x)=x^2+1$이므로 $f(2)=5$이다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족할 때 $f(2)$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 역함수를 가지며 $\left\|x-f^{-1}(x)\right\|=\|x\|-\left\|f^{-1}(x)\right\|$이다.
(나) $f'(0)=1$

$x \geq 0$이고 $x \geq f^{-1}(x)$인 경우 $x-f^{-1}(x)=x-\left|f^{-1}(x)\right|$에서 $f^{-1}(x) \geq 0$이다.

$x \geq 0$이고 $x < f^{-1}(x)$인 경우 $f^{-1}(x)-x=x-f^{-1}(x)$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

$x < 0$이고 $x > f^{-1}(x)$인 경우 $x-f^{-1}(x)=-x+f^{-1}(x)$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

$x < 0$이고 $x \leq f^{-1}(x)$인 경우 $f^{-1}(x)-x=-x-\left|f^{-1}(x)\right|$에서 $f^{-1}(x) \leq 0$이다.

이를 다음과 같은 방법으로도 확인할 수 있다.

조건 (가)에 의해 수직선 위의 세 점 $\mathrm{O}(0)$, $\mathrm{A}(x)$, $\mathrm{B}\left(f^{-1}(x)\right)$에 대해 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OB}}$이다.

즉 $x \geq 0$일 때 $x \geq f^{-1}(x) \geq 0$이고 $x \leq 0$일 때 $x \leq f^{-1}(x) \leq 0$이다.

다시 말해 $x \geq 0$일 때 $f(x) \geq x \geq 0$이고 $x \leq 0$일 때 $0 \geq x \geq f(x)$이다. $\therefore f(0)=0$

또한 $f'(0)=1$에서 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$와 $x=0$에서 접한다.

다시 말해 방정식 $f(x)=x$는 $x=0$에서 삼중근을 가진다. $\therefore f(x)=x^3+x$, $f(2)=10$