

2025학년도 피닉스 공통 모의고사

수학 영역 정답표
(홀수) 형

공통 과목					
문항 번호	정답	배점	문항 번호	정답	배점
1	④	2	12	④	4
2	①	2	13	③	4
3	②	3	14	①	4
4	⑤	3	15	⑤	4
5	④	3	16	24	3
6	③	3	17	32	3
7	③	3	18	363	3
8	④	3	19	432	3
9	⑤	4	20	17	4
10	③	4	21	770	4
11	②	4	22	505	4

1. **출제의도** : 지수 법칙을 활용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

$$(2^{\sqrt{3}} \times 4)^{(2+\sqrt{3})} \times 4^{-2\sqrt{3}} = 2^{(2+\sqrt{3}) \times (2+\sqrt{3})} \times 4^{-2\sqrt{3}} = 2^{(7+4\sqrt{3})} \times 4^{-2\sqrt{3}} \\ = 2^{(7+4\sqrt{3}-4\sqrt{3})} = 2^7 = 128$$

2. **출제의도** : 미분계수를 이용하여 양수 a 의 값을 구할 수 있는가?

$$f(x) = 3x^3 - 33x + 5 \text{ 에서 } f'(x) = 9x^2 - 33$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) = 9a^2 - 33 = 3$$

따라서 $9a^2 = 36$ 이므로 양수 a 의 값은 2

3. **출제의도** : 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하자.

$$a_n = ar^{n-1} \text{ (단, } n \text{은 자연수)}$$

$$a_1 + a_2 = a + ar$$

$$a_3 + a_4 = ar^2 + ar^3 = r^2(a + ar)$$

$$\frac{a_3 + a_4}{a_1 + a_2} = \frac{r^2(a + ar)}{a + ar} = r^2 = 3$$

$$\text{이므로 } a_5 = ar^4 = 9a = 3, \quad a = \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } a_1 = \frac{1}{3}$$

4. **출제의도** : 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4 + 1 = 5$$

5. **출제의도** : 거듭제곱근의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 n 의 값을 구할 수 있는가?

$$-n^2 + 7n + 8 = -(n+1)(n-8)$$

이므로 $-n^2 + 7n + 8$ 의 n 제곱근 중에서 양수가 존재하기 위해서는
 $-n^2 + 7n + 8 > 0$ 이어야 한다.

$$n^2 - 7n - 8 < 0$$

$$(n+1)(n-8) < 0$$

$$-1 < n < 8$$

2이상의 자연수 n 에 대하여

$$2 \leq n < 8$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$$

6. 출제의도 : 함수가 연속일 조건을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서만 불연속이므로

함수 $f(x)f(k)$ 가 $x = 0$ 에서 연속이 되도록 k 의 값을 정한다.

함수 $f(x)f(k)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면

$f(k) = 0$ 이어야 한다.

$f(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은 $-3, 2, 3$ 이므로

k 의 값은 $-3, 2, 3$ 이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 k 의 값의 곱은 $(-3) \times 2 \times 3 = -18$

7. 출제의도 : 지수함수의 그래프와 직선의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

직선 $y = kx$ 가 $(3, 12)$ 를 지나므로

$$k = 4$$

$y = kx$ 를 수직이등분하는 직선의 방정식이

$$y = -\frac{1}{k}(x-3) + 12 = -\frac{1}{4}(x-3) + 12$$

이므로

점 C의 좌표는 $(51, 0)$

원점을 O라 하면

$$\overline{OC} = 51 \text{ 이고}$$

점 A, 점 B의 좌표가 각각 $(2, 8), (4, 16)$ 이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 51 \times 16 - \frac{1}{2} \times 51 \times 8 = 204$$

8. 출제의도 : 미분을 이용하여 함수의 그래프의 개형을 알 수 있는가?

$$f(x) = ax^3 + (a-2)x^2 - 3x \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2(a-2)x - 3$$

이때, 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면

$$f'(x) \leq 0$$

이때, 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D/4 \leq 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$\begin{aligned} D/4 &= (a-2)^2 + 9a \\ &= a^2 + 5a + 4 \\ &= (a+1)(a+4) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{그러므로 } -4 \leq a \leq -1, 1 \leq a^2 \leq 16$$

따라서, a^2 의 최댓값은 16이다.

9. 출제의도 : 수직선 위를 움직이는 점의 움직인 거리를 구할 수 있는가?

시각 $t = 1$ 에서 $t = 3$ 까지 두 점 P, Q의 운동 방향이 서로 반대가 되면

두 점 P, Q의 속도의 부호가 달라야 하므로 $v_2(2) = 0$ 이다.

$$\text{즉, } b = -2a$$

시각 $t = 1$ 에서 $t = 3$ 까지 두 점 P, Q의 움직인 거리가 서로 같아야 하므로

$$\int_1^3 |v_1(t)| dt = \int_1^3 |v_2(t)| dt$$

$$\int_1^3 |4t - 8| dt$$

$$= \int_1^2 (-4t + 8) dt + \int_2^3 (4t - 8) dt$$

$$= [-2t^2 + 8t]_1^2 + [2t^2 - 8t]_2^3$$

$$= 2 + 2 = 4$$

$$\int_1^3 |at^2 + bt| dt = \int_1^3 |at^2 - 2at| dt$$

$$= \int_1^2 (at^2 - 2at) dt + \int_2^3 (-at^2 + 2at) dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}at^3 - at^2 \right]_1^2 + \left[-\frac{1}{3}at^3 + at^2 \right]_2^3$$

$$= \left(-\frac{8}{3}a \right) - \left(-\frac{2}{3}a \right) = -2a$$

$$\text{이므로 } -2a = 4$$

즉, $a = -2$, $b = 4$

$v_2(t) = -2t^2 + 4t$ 이다.

따라서 시각 $t = 4$ 에서 점 Q의 속도는 -16 이다.

10. 출제의도 : 문제를 해결할 수 있는가?

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = k - \frac{3}{\tan\theta}$$

에서

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}, \quad \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\theta}$$

이므로

$$-\frac{1}{\tan^2\theta} = k - \frac{3}{\tan\theta}$$

이때, 양변에 $-\tan^2\theta$ 을 곱하면

$$1 = -k\tan^2\theta + 3\tan\theta$$

$$k\tan^2\theta - 3\tan\theta + 1 = 0$$

모든 $\tan\theta$ 의 값의 합이 8이므로

$$\frac{3}{k} = 8, \quad \text{즉 } k = \frac{3}{8}$$

따라서 실수 k 의 값은 $\frac{3}{8}$ 이다.

11. 출제의도 : 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 에 대하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$f(x) = 3x^2 + ax + b$ (단, a, b 는 상수)

로 놓으면

$$\int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 3x^2}{x+1} = 0 \text{ 이므로}$$

$a = 0$, 즉 방정식 $\int_1^x f(t) dt = 0$ 의 모든 실근의 합이 0이다.

그러므로 방정식 $\int_1^x f(t) dt = 0$ 의 실근은 $-\frac{5}{2}$, 1 , $\frac{3}{2}$ 이다.

$$\int_1^x f(t) dt = \left(x + \frac{5}{2}\right)(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

따라서 $\int_1^5 f(x) dx = 105$

12. 출제의도 : 함수의 극한을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{ax^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + 3x}{f(x)} \text{ 이므로}$$

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 $a(a > 0)$ 인 이차함수이다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)f(x+1)}{x-1} &= f(1) \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f((x-1)+2)}{x-1} \\ &= f(1) \times f'(2) = 3 \end{aligned}$$

$f(1) > 0$ 이므로 $f'(2) > 0$

함수 $f(x)$ 의 모든 항의 계수와 상수항이 정수이므로

모든 정수 α 에 대하여 $f(\alpha)$ 와 $f'(\alpha)$ 의 값은 정수이다.

$f(x) = (x-2)(ax+b)$ (단, a, b 는 상수)

로 놓으면 다음과 같다.

(i) $f(1) = 1, f'(2) = 3$ 일 때

$$f(1) = -a - b = 1, f'(2) = 2a + b = 3$$

이므로 $a = 4, b = -5$

$$f(x) = (x-2)(4x-5)$$

이므로 $f(7) = 115$

(ii) $f(1) = 3, f'(2) = 1$ 일 때

$$f(1) = -a - b = 3, f'(2) = 2a + b = 1$$

이므로 $a = 4, b = -7$

$$f(x) = (x-2)(4x-7)$$

이므로 $f(7) = 105$

(i), (ii)에 의하여 모든 $f(7)$ 의 값의 합은

$$115 + 105 = 220$$

13. 출제의도 : 도형의 성질과 코사인법칙을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

원 C_1 과 원 C_2 의 넓이의 비가 $1:9$ 이므로

원 C_2 의 반지름이 $3\sqrt{2}$ 일 때

원 C_1 의 반지름은 $\sqrt{2}$ 이다.

원 C_2 의 중심을 O 라 하면

삼각형 OAP 에 대하여 피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{AP} = 4, \overline{AC} = 8$$

삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로

선분 AD가 삼각형 ABC와 삼각형 BDC를 수직이등분한다.

그러므로 선분 AD는 원 C_2 의 지름이다.

$$\angle ACD = \angle ABD = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{BD} = \overline{CD} = 2\sqrt{2} \text{ 이고}$$

점 O가 원 C_2 의 중심이므로 원주각과 중심각과의 관계에 의해

$$\angle BAC = \angle BOD$$

이때, 두 삼각형 ABC, OBD가 서로 닮음이므로

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{OB} : \overline{BD}$$

$$\text{즉, } 8 : \overline{BC} = 3\sqrt{2} : 2\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \frac{16}{3}$$

그러므로 코사인법칙에 의해

$$\begin{aligned} \cos(\angle BAC) &= \frac{8^2 + 8^2 - \left(\frac{16}{3}\right)^2}{2 \times 8 \times 8} \\ &= \frac{64 + 64 - \left(\frac{256}{9}\right)}{2 \times 8 \times 8} \\ &= \frac{128 - \left(\frac{256}{9}\right)}{128} \\ &= \frac{128 \times \left(1 - \frac{2}{9}\right)}{128} \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

$$\cos(\angle BDC) = -\cos(\angle BAC) \text{ 이므로}$$

$$\cos(\angle BAC) - \cos(\angle BDC) = 2\cos(\angle BAC)$$

$$\text{따라서 } \cos(\angle BAC) - \cos(\angle BDC) = \frac{14}{9}$$

14. **출제의도** : 정적분의 성질을 이용하여 극점의 개수를 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$ 의 도함수

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & (x < a) \\ -(x-3)(x-6) & (a \leq x < b) \\ (x-1)(x-6) & (x \geq b) \end{cases}$$

에 대하여

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면

도함수 $f'(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 좌우 극한의 부호가 달라야 한다.

(i) $a = 1$ 일 때,

함수 $f(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 모든 실수 α 의 개수가 3이 되도록 하는 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 6)$

(ii) $a = 2$ 일 때,

함수 $f(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 모든 실수 α 의 개수가 3이 되도록 하는 순서쌍 (a, b) 는 $(2, 3)$, $(2, 6)$

(iii) $a = 3$ 일 때,

함수 $f(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 모든 실수 α 의 개수가 3이 되도록 하는 순서쌍 (a, b) 는 $(3, 4)$, $(3, 5)$

(iv) $a = 4$ 일 때,

함수 $f(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 모든 실수 α 의 개수가 3이 되도록 하는 순서쌍 (a, b) 는 $(4, 5)$

(v) $a = 5$ 일 때,

조건을 만족시키는 순서쌍이 존재하지 않는다.

(i) ~ (v)에 의하여 두 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는 8

15. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 첫째항의 값을 구할 수 있는가?

11 이하의 자연수 n 에 대하여

a_1 을 k 라 하면

$a_2 = -k$, $a_3 = k + 1$ 이고,

$a_4 = a_2 + 2$, $a_5 = a_3 + 3$ 이므로

$a_4 = 2 - k$, $a_5 = k + 4$

(i) $a_4 a_5 \geq 0$ 일 때

(a) $a_9 a_{10} \geq 0$ 일 때

$-4 \leq k \leq 2$ 이고,

$a_6 = a_5 + 2 \times a_4 = (k + 4) + 2 \times (2 - k) = 8 - k$

이므로

$$a_7 = k + 9, a_8 = 14 - k, a_9 = k + 16, a_{10} = 22 - k$$

$-16 \leq k \leq 22$ 이므로

$$a_{11} = a_{10} + 3 \times a_9 = (22 - k) + 3 \times (k + 16) = 2k + 70$$

$a_{11} = 74$ 이므로

$$2k + 70 = 74, \text{ 즉 } k = 2$$

그러므로 $a_1 = 2$

(b) $a_9 a_{10} < 0$ 일 때

$-4 \leq k \leq 2$ 이고,

$$a_6 = a_5 + 2 \times a_4 = (k + 4) + 2 \times (2 - k) = 8 - k$$

이므로

$$a_7 = k + 9, a_8 = 14 - k, a_9 = k + 16, a_{10} = 22 - k$$

$k < -16$ 또는 $k > 22$ 이므로

조건을 만족시키는 k 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a_4 a_5 < 0$ 일 때

(a) $a_9 a_{10} \geq 0$ 일 때

$k < -4$ 또는 $k > 2$ 이고,

$$a_6 = a_4 + 4 = (2 - k) + 4 = 6 - k$$

이므로

$$a_7 = k + 9, a_8 = 12 - k, a_9 = k + 16, a_{10} = 20 - k$$

$-16 \leq k \leq 20$ 이므로

$$a_{11} = a_{10} + 3 \times a_9 = (20 - k) + 3 \times (k + 16) = 2k + 68$$

$a_{11} = 74$ 이므로

$$2k + 68 = 74, \text{ 즉 } k = 3$$

그러므로 $a_1 = 3$

(b) $a_9 a_{10} < 0$ 일 때

$k < -4$ 또는 $k > 2$ 이고,

$$a_6 = a_4 + 4 = (2 - k) + 4 = 6 - k$$

이므로

$$a_7 = k + 9, a_8 = 12 - k, a_9 = k + 16, a_{10} = 20 - k$$

$k < -16$ 또는 $k > 20$ 이므로

$$a_{11} = a_9 + 9 = (k + 16) + 9 = k + 25$$

$a_{11} = 74$ 이므로

$$k + 25 = 74, \text{ 즉 } k = 49$$

그러므로 $a_1 = 49$

(i), (ii)에 의하여 모든 a_1 의 값의 합은

$$2 + 3 + 49 = 54$$

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 로그가 포함된 방정식의 해를 구할 수 있는가?

로그의 진수의 조건에 의하여

$$x - 1 > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_{\sqrt{3}}(x-1) = \log_3(x-1)^2 \text{ 이므로}$$

$$4^{\log_{\sqrt{3}}(x-1)} - 16 \leq 0 \text{ 에서}$$

$$4^{\log_3(x-1)^2} \leq 16$$

$$\log_3(x-1)^2 \leq 2$$

$$(x-1)^2 \leq 9$$

$$x^2 - 2x - 8 \leq 0$$

$$(x-4)(x+2) \leq 0$$

$$-2 \leq x \leq 4$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 의하여

$$1 < x \leq 4$$

따라서 모든 정수 x 의 값의 곱은

$$2 \times 3 \times 4 = 24$$

17. 출제의도 : 정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

$$f'(x) = (x-1)(2x^2 + 5x - 7) \text{ 에서}$$

$$f(3) - f(1) = \int_1^3 f'(x) dx \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 f'(x) dx &= \int_1^3 (x-1)(2x^2 + 5x - 7) dx \\ &= \int_1^3 (2x^3 + 3x^2 - 12x + 7) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4 + x^3 - 6x^2 + 7x \right]_1^3 \\ &= 32 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } f(3) - f(1) = 32$$

18. 출제의도 : 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

$$\sum_{k=1}^{15} (a_k - 6) = \sum_{k=1}^{15} a_k - 90$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{13} (3k + a_k) &= 3 \sum_{k=1}^{13} k + \sum_{k=1}^{13} a_k \\ &= 3 \times \frac{13 \times 14}{2} + \sum_{k=1}^{13} a_k \\ &= 273 + \sum_{k=1}^{13} a_k \end{aligned}$$

에서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} a_k - 90 &= 273 + \sum_{k=1}^{13} a_k \\ \sum_{k=1}^{15} a_k - \sum_{k=1}^{13} a_k &= 363 \end{aligned}$$

따라서

$$a_{14} + a_{15} = 363$$

19. 출제의도 : 근의 조건이 주어진 방정식에서 미분을 이용하여 자연수 k 를 구할 수 있는가?

방정식

$$2x^3 - 9x^2 + 30 - k = 0 \quad \text{..... } \textcircled{1}$$

에서

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 30$$

라 하면 $\textcircled{1}$ 의 실근은 곡선 $y = f(x)$ 의 그래프와

직선 $y = k$ 가 만나는 점의 x 좌표이다.

한편,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 18x \\ &= 6x(x - 3) \end{aligned}$$

이므로

$$f'(x) = 0$$

에서

$$x = 0 \quad \text{또는} \quad x = 3$$

그러므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

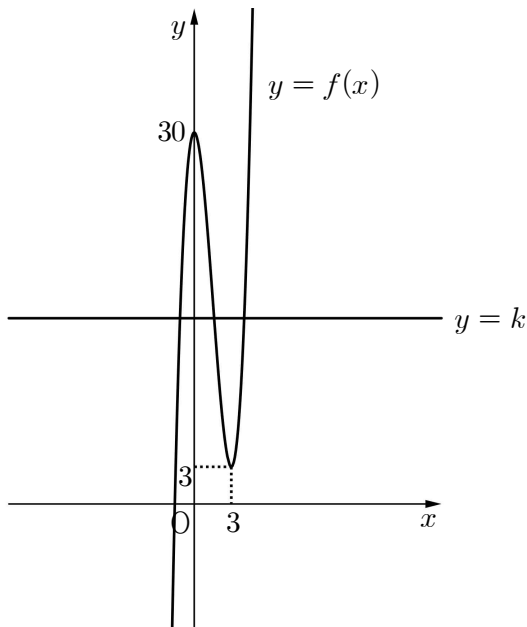
다음과 같다.

x	...	0	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 삼차함수 $f(x)$ 는

$x = 0$ 에서 극댓값 $f(0) = 30$ 을 갖고,

$x = 3$ 에서 극솟값 $f(3) = 3$ 을 갖는다.



주어진 방정식의 실근은 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = k$ 의 실근과 같으므로

주어진 방정식의 모든 실근의 곱이 음수가 될 조건은

위의 그래프에서

$k < 30$, 즉 $3 \leq k < 30$

이어야 한다.

따라서 구하는 모든 자연수 k 의 값의 합은 432

20. 출제의도 : 로그의 성질 및 로그부등식을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 합을 구할 수 있는가?

$\log_3 \sqrt{-n^2 + 14n + 51}$ 에서

진수 조건에 의하여

$$\sqrt{-n^2 + 14n + 51} > 0,$$

즉, $-n^2 + 14n + 51 > 0$ 에서

$$n^2 - 14n - 51 < 0$$

$$(n+3)(n-17) < 0$$

$$-3 < n < 17$$

이때, n 이 자연수이므로

$$0 < n < 17 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또, $\log_{\left(25 - \frac{1}{2}kn\right)} 9$ 에서

밑 조건에 의하여

$$25 - \frac{1}{2}kn > 0, \quad 25 - \frac{1}{2}kn \neq 1$$

$$\text{즉, } n < \frac{50}{k}, \quad n \neq \frac{48}{k} \dots\dots \textcircled{㉡}$$

한편,

$$\log_3 \sqrt{-n^2 + 14n + 51} \times \log_{\left(25 - \frac{1}{2}kn\right)} 9$$

의 값이 양수이므로

$$\log_3 \sqrt{-n^2 + 14n + 51} \times \log_{\left(25 - \frac{1}{2}kn\right)} 9 > 0$$

에서

$$\log_9(-n^2 + 14n + 51) \times \frac{1}{\log_9\left(25 - \frac{1}{2}kn\right)} > 0$$

$$\frac{\log_9(-n^2 + 14n + 51)}{\log_9\left(25 - \frac{1}{2}kn\right)} > 0$$

이때, 밑 9가 1보다 크므로

$$\log_9(-n^2 + 14n + 51) \times \log_9\left(25 - \frac{1}{2}kn\right) > 0$$

$$(i) \quad -n^2 + 14n + 51 > 1, \quad 25 - \frac{1}{2}kn > 1 \text{ 일 때}$$

$$7 - 3\sqrt{11} < n < 7 + 3\sqrt{11}, \quad n < \frac{48}{k}$$

즉, 조건을 만족시키는 자연수 n 의 범위가

$$0 < n < 7 + 3\sqrt{11}, \quad n < \frac{48}{k}$$

즉, 조건을 만족시키는 자연수 n 의 값이 5가 되기 위해서

$$5 < \frac{48}{k} \leq 6 \text{ 를 만족시켜야 한다.}$$

그러므로 조건을 만족시키는 자연수 k 의 값은 8, 9이다.

(ii) $0 < -n^2 + 14n + 51 < 1$, $0 < 25 - \frac{1}{2}kn < 1$ 일 때

$$-3 < n < 7 - 3\sqrt{11} \quad \text{또는} \quad 7 + 3\sqrt{11} < n < 17, \quad \frac{48}{k} < n < \frac{50}{k}$$

즉, 조건을 만족시키는 자연수 n 의 범위가

$$7 + 3\sqrt{11} < n < 17, \quad \frac{48}{k} < n < \frac{50}{k}$$

그러므로 조건을 만족시키는 자연수 n 의 값이 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 k 의 값의 합은 17

21. 출제의도 : 함수의 그래프의 개형을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

부등식 $\frac{f(x)}{x-1} < \frac{g(x)}{x-1} < f'(x)$ 에서

$f(1) = 0$, $g(1) = 0$, $f'(1) = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} < \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x-1} < \lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$$

$$g'(1) = \frac{1}{2}, \quad \text{즉} \quad g(x) = \frac{1}{2}(x-1)$$

함수 $f(x) - g(x)$ 를 $h(x)$ 라 하면

$x = 1$ 에서 함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x)$ 의 기울기가 같으므로

$x = 1$ 에서 방정식 $h(x) = 0$ 은 중근을 갖거나 삼중근을 갖는다.

(i) 방정식 $h(x) = 0$ 이 $x = 1$ 을 중근으로 갖는 경우

조건 (나)에서 $\int_{-3}^k g(x) dx > \int_{-3}^k f(x) dx$ 이므로

$$\int_{-3}^k \{f(x) - g(x)\} dx = \int_{-3}^k h(x) dx < 0$$

조건을 만족시키는 실수 k 의 값의 범위가

$$-3 < k < -1 \text{ 이므로}$$

$$h(x) = f(x) - g(x) = (x-1)^2(x+1)(x+3)$$

$$\text{그러므로} \quad f(x) = (x-1)^2(x+1)(x+3) + \frac{1}{2}(x-1)$$

(ii) 방정식 $h(x) = 0$ 이 $x = 1$ 을 삼중근으로 갖는 경우

조건 (나)에서 $\int_{-3}^k g(x) dx > \int_{-3}^k f(x) dx$ 이므로

$$\int_{-3}^k \{f(x) - g(x)\} dx = \int_{-3}^k h(x) dx < 0$$

조건을 만족시키는 실수 k 의 값의 범위가

$$-3 < k < -1 \text{ 이므로}$$

조건을 만족시키는 함수 $h(x)$ 는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $f(x) = (x-1)^2(x+1)(x+3) + \frac{1}{2}(x-1)$

따라서 $f(5)$ 의 값은 770

22. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

a, b, c 가 모두 자연수이고 $a > c$ 이므로

주기가 $\frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{b}$ 이고,

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 음수이고 최댓값은 양수다.

$24 = 2^3 \times 3$ 이고 $c \geq 1, a \geq 2$ 이므로

가능한 b 의 값은 24의 양의 약수 중 24를 제외한 수이다.

b 의 값에 따라 a 와 c 의 값을 결정해보면 다음과 같다.

(i) $b = 1$ 일 때

가능한 순서쌍 (a, c) 는 $(24, 1), (12, 2), (8, 3), (6, 4)$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -1 보다 작고, 주기는 2이므로

방정식 $f(x) + 1 = 0$ 의 실근의 개수가 4이다.

방정식 $f(x) + 1 = 0$ 의 실근을 a_1, a_2, a_3, a_4 라 하면

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{3}{2}, \quad \frac{a_3 + a_4}{2} = \frac{7}{2} \text{ 이므로}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10, \text{ 즉 } k = 10$$

그러므로 구하는 모든 $a + b + k$ 의 값의 합은

$$35 + 23 + 19 + 17 = 94$$

(ii) $b = 2$ 일 때

(a) 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -1 일 때

가능한 순서쌍 (a, c) 는 $(4, 3)$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -1 이고, 주기는 1이므로

방정식 $f(x) + 1 = 0$ 의 실근의 개수가 4이다.

방정식 $f(x) + 1 = 0$ 의 실근을 a_1, a_2, a_3, a_4 라 하면

$$a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_2 = \frac{7}{4}, \quad a_3 = \frac{11}{4}, \quad a_4 = \frac{15}{4} \text{ 이므로}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 9, \text{ 즉 } k = 9$$

그러므로 구하는 $a + b + k$ 의 값은 15

(b) 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -1 이 아닐 때

가능한 순서쌍 (a, c) 는 $(12, 1)$, $(6, 2)$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -1 보다 작고, 주기는 1 이므로

방정식 $f(x) + 1 = 0$ 의 실근의 개수가 8 이다.

방정식 $f(x) + 1 = 0$ 의 실근을 a_1, a_2, \dots, a_8 라 하면

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{3}{4}, \dots, \frac{a_7 + a_8}{2} = \frac{15}{4} \text{ 이므로}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_7 + a_8 = 18, \text{ 즉 } k = 18$$

그러므로 구하는 모든 $a + b + k$ 의 값의 합은

$$32 + 26 = 58$$

(iii) $b = 3$ 일 때

가능한 순서쌍 (a, c) 는 $(8, 1)$, $(4, 2)$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -1 보다 작고, 주기는 $\frac{2}{3}$ 이므로

방정식 $f(x) + 1 = 0$ 의 실근의 개수가 12 이다.

방정식 $f(x) + 1 = 0$ 의 실근을 a_1, a_2, \dots, a_{12} 라 하면

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{1}{2}, \dots, \frac{a_{11} + a_{12}}{2} = \frac{23}{6} \text{ 이므로}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{11} + a_{12} = 26, \text{ 즉 } k = 26$$

그러므로 구하는 모든 $a + b + k$ 의 값의 합은

$$37 + 33 = 70$$

(iv) $b = 4$ 일 때

(a) 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -1 일 때

가능한 순서쌍 (a, c) 는 $(3, 2)$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -1 이고, 주기는 $\frac{1}{2}$ 이므로

방정식 $f(x) + 1 = 0$ 의 실근의 개수가 8 이다.

방정식 $f(x) + 1 = 0$ 의 실근을 a_1, a_2, \dots, a_8 라 하면

$$a_1 = \frac{3}{8}, a_2 = \frac{7}{8}, \dots, a_8 = \frac{31}{8} \text{ 이므로}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_7 + a_8 = 17, \text{ 즉 } k = 17$$

그러므로 구하는 $a + b + k$ 의 값은 24

(b) 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -1 이 아닐 때

가능한 순서쌍 (a, c) 는 $(6, 1)$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -1 보다 작고, 주기는 $\frac{1}{2}$ 이므로

방정식 $f(x) + 1 = 0$ 의 실근의 개수가 16 이다.

방정식 $f(x) + 1 = 0$ 의 실근을 a_1, a_2, \dots, a_{16} 라 하면

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{3}{8}, \dots, \frac{a_{15} + a_{16}}{2} = \frac{31}{8} \text{ 이므로}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{15} + a_{16} = 34, \text{ 즉 } k = 34$$

그러므로 구하는 $a + b + k$ 의 값은 44

(v) $b = 6$ 일 때

가능한 순서쌍 (a, c) 는 $(4, 1)$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -1 보다 작고, 주기는 $\frac{1}{3}$ 이므로

방정식 $f(x) + 1 = 0$ 의 실근의 개수가 24이다.

방정식 $f(x) + 1 = 0$ 의 실근을 a_1, a_2, \dots, a_{24} 라 하면

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{1}{4}, \dots, \frac{a_{23} + a_{24}}{2} = \frac{47}{12} \text{ 이므로}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{23} + a_{24} = 50, \text{ 즉 } k = 50$$

그러므로 구하는 $a + b + k$ 의 값은 60

(vi) $b = 8$ 일 때

가능한 순서쌍 (a, c) 는 $(3, 1)$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -1 보다 작고, 주기는 $\frac{1}{4}$ 이므로

방정식 $f(x) + 1 = 0$ 의 실근의 개수가 32이다.

방정식 $f(x) + 1 = 0$ 의 실근을 a_1, a_2, \dots, a_{32} 라 하면

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{3}{16}, \dots, \frac{a_{31} + a_{32}}{2} = \frac{63}{16} \text{ 이므로}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{31} + a_{32} = 66, \text{ 즉 } k = 66$$

그러므로 구하는 $a + b + k$ 의 값은 77

(vii) $b = 12$ 일 때

가능한 순서쌍 (a, c) 는 $(2, 1)$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -1 이고, 주기는 $\frac{1}{6}$ 이므로

방정식 $f(x) + 1 = 0$ 의 실근의 개수가 24이다.

방정식 $f(x) + 1 = 0$ 의 실근을 a_1, a_2, \dots, a_{24} 라 하면

$$a_1 = \frac{1}{8}, a_2 = \frac{7}{24}, \dots, a_{24} = \frac{95}{24} \text{ 이므로}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{23} + a_{24} = 49, \text{ 즉 } k = 49$$

그러므로 구하는 $a + b + k$ 의 값은 63

(i) ~ (vii)에 의하여 모든 $a + b + k$ 의 값의 합은

$$94 + 15 + 58 + 70 + 24 + 44 + 60 + 77 + 63 = 505$$