뫼비우스 모의고사 정답 & 해설

공통과목				선택과목					
				확률과 통계		미적분		기하	
문항번호	정답	문항번호	정답	문항번호	정답	문항번호	정답		
1	①	12	⑤			23	②		
2	⑤	13	④			24	②		
3	②	14	④			25	③		
4	①	15	⑤			26	⑤		
5	④	16	7			27	①		
6	③	17	4			28	①		
7	②	18	32			29	80		
8	③	19	5			30	70		
9	④	20	8						
10	①	21	49						
11	③	22	19						

공통(수Ⅰ+수Ⅱ)

1. 정답 : ① 9
구하는 값은 $\left(9\times 3^{\sqrt{2}}\right)^{2-\sqrt{2}} = 3^{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = 3^{4-2} = 9$이다.

2. 정답 : ⑤ 6
함수 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=6x^2+6x-6$이므로
구하는 값은 $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 6$이다.

3. 정답 : ② $\dfrac{21}{8}$
첫째항이 2이고 공비가 a_3이므로 $a_2 = 2a_3$이다.
즉, $a_3 = \dfrac{1}{2}\times a_2$이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비는 $\dfrac{1}{2}$이다.
따라서 구하는 값은 $a_1+a_3+a_5 = 2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8} = \dfrac{21}{8}$이다.

4. 정답 : ① 1
$\lim_{x\to -1-} f(x) = 1$이고 $\lim_{x\to 1-} f(x) = 0$이므로
구하는 값은 1이다.

5. 정답 : ④ $-\dfrac{5\sqrt{6}}{12}$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta = \dfrac{2\sqrt{6}}{7}$이다.
$\cos\theta > 0$이므로 $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < 0$이다.
$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = \dfrac{25}{49}$이므로 $\sin\theta = -\dfrac{5}{7}$이다.
따라서 구하는 값은 $\tan\theta = -\dfrac{5\sqrt{6}}{12}$이다.

6. 정답 : ③ 3
$x=1$일 때 $f(1)>0$이므로 $f(1)=1$이다.
양변을 x에 대하여 미분하면
$xf(x) = 2f(x)f'(x)$에서
$f'(x) = \dfrac{x}{2}$이다.
양변을 x에 대하여 부정적분하면
$f(x) = \dfrac{x^2}{4} + C$이고 $f(1)=1$이므로
$C = \dfrac{3}{4}$이다.
따라서 $f(x) = \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3}{4}$이므로 구하는 값은 $f(3)=3$이다.

7. 정답 : ② 7
두 곡선이 만나는 점의 개수는
방정식 $2x^3-9x^2+15x-2 = 3x+n$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.
방정식 $2x^3-9x^2+12x-2 = n$에서
함수 $f(x)$를 $f(x) = 2x^3-9x^2+12x-2$로 두자.
$f'(x) = 6x^2-18x+12 = 6(x-1)(x-2)$이므로
함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 3을 갖고
$x=2$에서 극솟값 2를 갖는다.
따라서 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=2$, $a_4=1$, $a_5=1$이므로
구하는 값은 7이다.

8. 정답 : ③ 54
$\sum_{n=1}^{4} g(n+3) = 5$에서
$g(4)+g(5)+g(6)+g(7) = 5$이다.
n이 홀수일 때 $f(n)$의 부호와 관계없이 $g(n)=1$이므로
$g(4)+g(6) = 3$이다.
또한 $g(n)$의 값은 0, 1, 2중 하나이므로
$g(4)=2$, $g(6)=1$이거나 $g(4)=1$, $g(6)=2$이다.

(i) $g(4)=2$, $g(6)=1$인 경우
$g(6)=1$이므로 $f(6)$의 6제곱근 중 실수인 것의 개수가 1이다. 따라서 $f(6)=0$, $f(x)=(x-1)(x-6)$이다.
$f(4)<0$이 되어 $g(4)=0$이므로 모순이다.

(ii) $g(4)=1$, $g(6)=2$인 경우

$g(4)=1$이므로 $f(4)$의 4제곱근 중 실수인 것의 개수가 1이다. 따라서 $f(4)=0$, $f(x)=(x-1)(x-4)$이다.

$f(6)>0$이므로 $g(6)=2$이다.

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=(x-1)(x-4)$이므로
구하는 값은 $f(10)=54$이다.

9. 정답 : ④ $-\frac{7}{3}$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=2k$이므로
삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0, k)$에 대하여 대칭이다.

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+f(-1)-6}{x-1}=-k$에서

$\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to 1}\{f(x)+f(-1)-6\}=0$이다

즉, $f(1)+f(-1)=6$이므로 $k=3$이다.

이때 $f(-1)-6=-f(1)$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+f(-1)-6}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-3$에서

$f'(1)=-3$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 3)$에 대하여 대칭이므로
$f(x)=ax^3+bx+3$으로 두자.

$f'(1)=-3$, $f(k)=f(3)=0$이므로

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+3$이다.

따라서 구하는 값은 $f(2)=-\frac{7}{3}$이다.

10. 정답 : ① 42

$n\ge 2$인 자연수 n에 대하여

$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$

$=(-1)^n\times n-(-1)^{n-1}\times(n-1)$이다.

$\sum_{k=1}^{n}a_k=(-1)^n\times n$에서 $n=1$일 때, $a_1=-1$이므로
모든 자연수 n에 대하여

$a_n=(-1)^n\times n-(-1)^{n-1}\times(n-1)$이다. …… ㉠

㉠에서 $n=6k-3$일 때, $a_{6k-3}=-12k+7$이고,

$n=6k$일 때, $a_{6k}=12k-1$이다.

($\because$ $6k-3$은 홀수, $6k$는 짝수)

따라서 구하는 값은

$\sum_{k=1}^{14}a_{3k}=\sum_{k=1}^{7}a_{6k-3}+\sum_{k=1}^{7}a_{6k}$

$=\sum_{k=1}^{7}(-12k+7)+\sum_{k=1}^{7}(12k-1)$

$=\sum_{k=1}^{7}6=42$이다.

11. 정답 : ③ 17

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, -16)$에서의 접선이 x축에
평행하므로 $f(3)=-16$, $f'(3)=0$이다.

삼차함수 $f(x)$의 극댓값이 -16이면 조건 (나)에 모순이므로
$f(x)$의 극솟값이 -16이다.

조건 (나)에서 $|f(x)|=16$, $f(x)=\pm16$을 만족시키는
서로 다른 실근의 개수가 4보다 커야한다.

즉, 함수 $f(x)$의 극댓값이 16보다 커야한다.

$f(x)=(x-3)^2(x-\alpha)-16$으로 두면 (단, $\alpha<3$)

$f'(x)=2(x-3)(x-\alpha)+(x-3)^2$

$=(x-3)(3x-2\alpha-3)$

이므로

함수 $f(x)$는 $x=1+\frac{2\alpha}{3}$에서 극대이다.

$f\left(1+\frac{2\alpha}{3}\right)=4\left(1-\frac{\alpha}{3}\right)^3-16>16$에서

$\left(1-\frac{\alpha}{3}\right)^3>8$

$1-\frac{\alpha}{3}>2$

$\therefore \alpha<-3$

이때 $f(-1)=-16(2+\alpha)=n$으로 두자. (단, n은 자연수)

$\alpha<-3$에서 $-\frac{n}{16}-2<-3$, $\therefore n>16$

따라서 $f(-1)=n$의 최솟값은 17이다.

12. 정답 : ⑤ $2\sqrt{3}$

점 A의 x좌표를 α, 점 B의 x좌표를 β라 하자.

원이 y축에 접하므로 $r=\frac{\alpha+\beta}{2}$이다.

직선 AB의 기울기가 $\sqrt{3}$이므로 $2r=2(\beta-\alpha)$이다.

두 식을 연립하면 $\beta=3\alpha$이다.

이때 두 점 A, B는 직선 $y=\sqrt{3}x$와 곡선 $y=a^x$의
교점이므로

$a^\alpha=\sqrt{3}\alpha$, $a^{3\alpha}=3\sqrt{3}\alpha$이다. 두 식을 나누면 $a^{2\alpha}=3$이므로
$a^\alpha=\sqrt{3}$이다.

즉, $\alpha=1$, $a=\sqrt{3}$이므로 $r=2$이다.

직선 $x=ra^r=6$이 곡선 $y=2\sqrt{3}\log_6 x$와 만나는 점이
C이므로

$\mathrm{C}(6, 2\sqrt{3})$이다.

$\mathrm{A}(1, \sqrt{3})$, $\mathrm{B}(3, 3\sqrt{3})$, $\mathrm{C}(6, 2\sqrt{3})$이므로
삼각형 ABC의 무게중심의 y좌표는

$\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$이다.

13. 정답 : ④ $\frac{13\sqrt{3}}{6}-\pi$

원 C가 점 $(3, \sqrt{3})$을 지나므로 $r=2\sqrt{3}$이다.

원 $x^2+y^2=12$위의 점 $(3, \sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

$y=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$ 이다.
곡선 $y=a(x-b)^2$ 이 $(3,\ \sqrt{3})$ 을 지나므로
$a(3-b)^2=\sqrt{3}$ 이고, …… ㉠
곡선 $y=a(x-b)^2$ 위의 점 $(3,\ \sqrt{3})$ 에서의 접선의 기울기가 $-\sqrt{3}$ 이므로 $2a(3-b)=-\sqrt{3}$ 이다. …… ㉡
㉠÷㉡에서 $\dfrac{3-b}{2}=-1$, $b=5$ 이고 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 이다.
따라서 둘러싸인 부분의 넓이는 $\displaystyle\int_3^5 \frac{\sqrt{3}}{4}(x-5)^2dx$ 의 값에서 (반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 이고 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$ 인 부채꼴의 넓이) − (한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형의 넓이)의 값의 절반을 빼주면 된다.

$$\int_3^5 \frac{\sqrt{3}}{4}(x-5)^2dx=\int_{-2}^0 \frac{\sqrt{3}}{4}x^2dx$$
$$=\left[\frac{\sqrt{3}}{12}x^3\right]_{-2}^0$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

이므로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\times12\times\dfrac{\pi}{3}-3\sqrt{3}\right)=\dfrac{13\sqrt{3}}{6}-\pi$ 이다.

14. 정답 : ④ $\dfrac{85}{2}$
$a_2=p$ 로 두면 a_2 부터 a_6 까지의 항은 다음 표와 같다.

<table>
<tr><th>a_2</th><th>a_3</th><th>a_4</th><th>a_5</th><th>a_6</th></tr>
<tr><td rowspan="4">p</td><td rowspan="3">$(p<24)$
$2p-6$</td><td>$(p<6)$
$4p-18$</td><td>$8p-42$</td><td>$16p-90$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$(6\le p<24)$
$p-7$</td><td rowspan="2">$2p-20$</td><td>$(6\le p<13)$
$4p-46$</td></tr>
<tr><td>$(13\le p<24)$
$p-14$</td></tr>
<tr><td>$(p\ge 24)$
$\dfrac{p}{2}-4$</td><td>$p-14$</td><td>$\dfrac{p}{2}-11$</td><td>$p-28$</td></tr>
</table>

위의 표를 참고할 때 $a_6=-2$ 가 되도록 하는 p 의 값은 $\dfrac{11}{2}$, 11, 26 이다.
따라서 구하는 값은 $\dfrac{11}{2}+11+26=\dfrac{85}{2}$ 이다.

15. 정답 : ⑤ 16
$xg(x)-F(1)=\displaystyle\int_1^x f(t)dt+g(x)$ 에서
$\displaystyle\int_1^x f(t)dt=F(x)-F(1)$ 이므로
$xg(x)-F(1)=F(x)-F(1)+g(x)$
$(x-1)g(x)=F(x)$ 이다.
이때 조건 (나)에 의하여 $g(\alpha)=g(\beta)=0$ 이므로
$F(\alpha)=F(\beta)=0$ 이다. …… ㉠
$(x-1)g(x)=F(x)$ 에서 양변을 x 에 대하여 미분하면
$g(x)+(x-1)g'(x)=f(x)$ 이다.
조건 (나)에 의하여 $g'(\alpha)=g'(\beta)=0$ 이므로
$f(\alpha)=f(\beta)=0$ 이다. …… ㉡
$f(\alpha)=F'(\alpha)$, $f(\beta)=F'(\beta)$ 이므로
㉠과 ㉡에 의하여 $F(x)=\dfrac{1}{4}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ 이다.
이때 $f(2)=F(4)=0$ 이므로 $F'(2)=F(4)=0$ 이다.
$F'(x)=0$ 을 만족시키는 실수 x 는
$x=\alpha$, $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $x=\beta$ 이다.
만약 $\beta=2$ 이면 $F(4)=0$ 을 만족시킬 수 없으므로 모순이고,
만약 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=2$ 이면 $\beta=4$ 가 되어 $\alpha=0$ 이므로
$1<\alpha<\beta$ 에 모순이다.
따라서 $\alpha=2$ 이고 $F(4)=0$ 이므로 $\beta=4$ 이다.
$F(x)=\dfrac{1}{4}(x-2)^2(x-4)^2$ 이므로
구하는 값은 $F(6)=16$ 이다.

16. 정답 : 7
$\log_4(x-5)=\log_2(x-5)-\dfrac{1}{2}$ 에서
$\dfrac{1}{2}\log_2(x-5)=\log_2(x-5)-\dfrac{1}{2}$
$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\log_2(x-5)$
$\log_2(x-5)=1$
$\therefore x=7$

17. 정답 : 4
$f'(x)=4x^3+6x^2-3x+1$ 에서 양변을 부정적분하면
$f(x)=x^4+2x^3-\dfrac{3}{2}x^2+x+C$ 이다. (단, C 는 적분상수)
$f(1)=\dfrac{5}{2}+C=\dfrac{13}{2}$ 이므로
$C=4$ 이다.
따라서 구하는 값은 $f(0)=4$ 이다.

18. 정답 : 32
등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공차를 d 로 두자.
$a_5=2$ 이므로 $a+4d=2$ 이다.
등차중항의 성질에 의하여 $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=3a_{n+1}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{10}(a_n+a_{n+1}+a_{n+2})=\sum_{n=1}^{10}3a_{n+1}$$
$$=3\times\frac{a_2+a_{11}}{2}\times10$$

$=150$ 이다.

즉, $a_2+a_{11}=10$ 에서 $2a+11d=10$ 이다.

$a+4d=2$ 와 연립하면 $a=-6$, $d=2$ 이다.

따라서 구하는 값은 $a_{20}=-6+2\times19=32$ 이다.

19. 정답 : 5

$x(3)=0$ 이므로 시각 $t=3$ 에서 점 P는 원점을 지난다.

따라서 $v(3)=0$ 이다.

$x(t)=(t-3)(t^2+at+b)$ 에서 양변을 t 로 미분하면

$v(t)=3t^2+(2a-6)t+b-3a$ 이다.

$v(3)=27+3(2a-6)+b-3a=0$ 에서

$3a+b+9=0$ 이다. $b=-3a-9$ 이므로

$x(t)=(t-3)(t^2+at-3a-9)=(t-3)^2(t+a+3)$ 이다.

$a\neq-6$ 이므로 $-a-3\neq3$ 이다.

만약 $-a-3\geq0$ 이면 $x(-a-3)=0$, $v(-a-3)\neq0$ 이므로

조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $-a-3<0$ 에서 $a>-3$ 이다.

$x(4)=16+4a+b=a+7$ 이다.

a는 정수이고 $a>-3$이므로 $x(4)$ 의 최솟값은 5 이다.

20. 정답 : 8

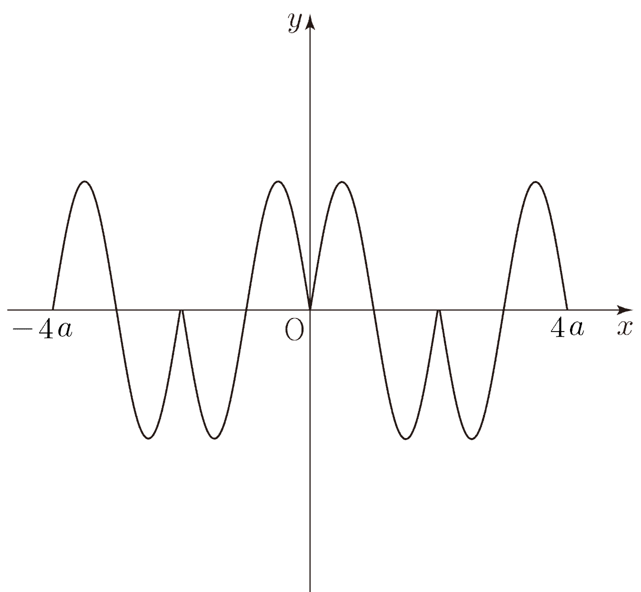
조건 (가)에서 x 대신 $x+2a$ 를 대입하면

$f(x+2a)+f(x+4a)=0$ 이다. $f(x)+f(x+2a)=0$ 과 연립하면

$f(x)=f(x+4a)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 주기가 $4a$ 이다.

$0\leq x\leq 2a$ 일 때 $f(x)=\sin\frac{\pi}{a}x$ 이고 $f(x+2a)=-f(x)$ 이므로

$-4a\leq x\leq 4a$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 는 아래 그림과 같다.



위의 그림을 참고할 때

사각형 ABCD가 최대가 되는 순간은

$A\left(-\frac{7a}{2},1\right)$, $B\left(\frac{7a}{2},1\right)$, $C\left(\frac{5a}{2},-1\right)$, $D\left(-\frac{5a}{2},-1\right)$ 이므로

사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $\frac{(7a+5a)}{2}\times2=12a$ 이다.

사각형 ABCD의 넓이가 최소가 되는 순간은

$A\left(-\frac{a}{2},1\right)$, $B\left(\frac{a}{2},1\right)$, $C\left(\frac{5a}{2},-1\right)$, $D\left(\frac{3a}{2},-1\right)$ 이므로

사각형 ABCD의 넓이의 최솟값은 $\frac{(a+a)}{2}\times2=2a$ 이다.

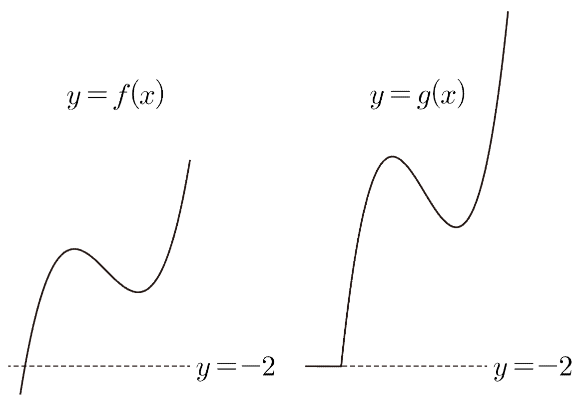
즉, 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값과 최솟값의 합은 $14a$ 이므로 $14a=112$ 에서 $a=8$ 이다.

21. 정답 : 49

함수 $g(x)$ 는 $f(x)>-2$ 일 때 $g(x)=2f(x)+2$ 이고

$f(x)\leq-2$ 일 때 $g(x)=-2$ 이다.

만약 직선 $y=-2$ 과 곡선 $y=f(x)$ 의 위치관계가 아래 그림과 같다면



$n(A)=4$ 를 만족시키기 위하여 $g(x)$ 의 극댓값과 극솟값 중간에 y 축이 위치해야한다.

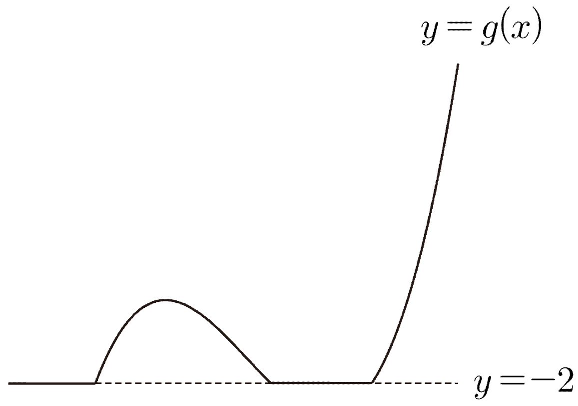
이때 $n(B)=n(A\cap B)$이므로 모순이다.

만약 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 -2 보다 작거나 같다면

$n(A)=4$ 를 만족시킬 수 없으므로 모순이다.

즉, 직선 $y=-2$ 는 극댓값과 극솟값 사이에 위치하고

곡선 $y=g(x)$ 는 아래 그림과 같다.



이때 $n(B)=2\times n(A\cap B)$를 만족시키기 위하여

$n(B)=2$, $n(A\cap B)=1$ 이고,

함수 $g(x)$ 의 극댓값이 0이 되어야한다.

함수 $f(x)$ 의 극댓값을 M이라 하면

함수 $g(x)$ 의 극댓값은 $2M+2$ 이므로

$2M+2=0$ $\therefore M=-1$

집합 B 의 원소를 α, β라 하자. (단, $\alpha<\beta$)

집합 $A-B$의 원소는 3개이고, 이 3개의 원소는

방정식 $2f(x)+2=-2$ 의 서로 다른 세 실근이므로

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

집합 $A-B$의 모든 원소의 합은 $2\alpha+\beta$이다.

집합 B의 모든 원소의 합은 $\alpha+\beta$이므로

조건 (나)에 의하여

$S(A-B)-S(B)=(2\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)=1$

$\therefore \alpha=1$

$f'(3)=0$이므로 $f(x)=(x-1)^2(x-4)-1$이다.

따라서 구하는 값은 49이다.

22. 정답 : 19

$\cos(\angle \mathrm{ABD})=\cos(\angle \mathrm{BCE})$이므로 각 ABD의 크기와 각 BCE의 크기는 같다. 원주각의 성질에 의하여 호 AD의 길이와 호 BE의 길이가 같으므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{DE}}=4$이다.

즉, 사각형 ABDE는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{DE}}$인 등변사다리꼴이다.

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}}^2=8^2+4^2-2\times8\times4\times\frac{1}{8}=72$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=6\sqrt{2}$이다.

사각형 ABCD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면

삼각형 $\angle$ABD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{6\sqrt{2}}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=2R$, $R=\frac{8}{7}\sqrt{14}$이다.

삼각형 MDE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{ME}}^2=4^2+4^2-2\times4\times4\times\frac{1}{8}=28$이므로 $\overline{\mathrm{ME}}=2\sqrt{7}$이다.

삼각형 DME는 이등변삼각형이므로

$\cos(\angle \mathrm{EMD})=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\sin(\angle \mathrm{EMD})=\frac{3}{4}$이다.

삼각형 ECD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\frac{3}{4}}=\frac{16}{7}\sqrt{14}$, $\overline{\mathrm{CD}}=\frac{12}{7}\sqrt{14}$이다.

따라서 구하는 값은 $p+q=19$이다.

선택과목(미적분)

23. 정답 : ② $e-\frac{1}{e}$

구하는 값은

$\int_0^{\pi}\sin x\, e^{\cos x}dx=\left[-e^{\cos x}\right]_0^{\pi}=-e^{-1}+e^1=e-\frac{1}{e}$ 이다.

24. 정답 : ② $-\frac{2}{e^2(2e^2-\pi)}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-2e^{-2t}-\pi\sin\pi t}{2e^{2t}+\pi\cos\pi t}$ 이므로

$t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}=\frac{-2e^{-2}}{2e^2-\pi}=-\frac{2}{e^2(2e^2-\pi)}$ 이다.

25. 정답 : ③ 2

$x\neq 0$인 실수 x에 대하여 $f(x)=\frac{a-9\cos 2x}{x\ln(1+x)}$ 이다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$에서

$\lim_{x\to 0}\frac{a-9\cos 2x}{x\ln(1+x)}=f(0)$이다.

$\lim_{x\to 0}x\ln(1+x)=0$이므로 $\lim_{x\to 0}(a-9\cos 2x)=0$이어야한다.

$\therefore a=9$

$\lim_{x\to 0}\frac{9(1-\cos 2x)}{x\ln(1+x)}=f(0)$

$\lim_{x\to 0}\frac{9(1-\cos 2x)}{4x^2}\times\frac{4x}{\ln(1+x)}=f(0)$

$9\times\frac{1}{2}\times 4=18=f(0)$이므로

구하는 값은 $\frac{f(0)}{a}=\frac{18}{9}=2$이다.

26. 정답 : ⑤ $2e^2-e$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로
구하고자 하는 넓이는
곡선 $y=f(x)$가 직선 $x=1$, 직선 $x=2$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.
따라서 구하는 값은

$$\int_1^2 x^2e^xdx=\left[x^2e^x\right]_1^2-\int_1^2 2xe^xdx$$

$$=4e^2-e-\left[2xe^x\right]_1^2+\int_1^2 2e^xdx$$

$$=e+\left[2e^x\right]_1^2$$

$$=2e^2-e$$ 이다.

27. 정답 : ① 8

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 곡선 $y=3\sin x$와 곡선 $y=\tan x$가 만나는 점의 x좌표를 α라 하자.

$3\sin\alpha=\tan\alpha$에서 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$이다.

$x\leq\alpha$일 때 $3\sin x\geq\tan x$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(3\sin x)^{n+1}+(\tan x)^{n+1}}{(3\sin x)^n+(\tan x)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sin x+\left(\frac{\tan x}{3\sin x}\right)^n\tan x}{1+\left(\frac{\tan x}{3\sin x}\right)^n}$$

$=3\sin x$이고

$x>\alpha$일 때 $3\sin x<\tan x$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(3\sin x)^{n+1}+(\tan x)^{n+1}}{(3\sin x)^n+(\tan x)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sin x\left(\frac{3\sin x}{\tan x}\right)^n+\tan x}{\left(\frac{3\sin x}{\tan x}\right)^n+1}$$

$=\tan x$이다.

즉, 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}3\sin x & (0<x\leq\alpha)\\ \tan x & \left(\alpha<x<\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

이다.

만약 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다면

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 이므로

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=0$이 되어

모순이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지않으므로

$a=\alpha$이다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\begin{cases}3\cos x & (0<x<\alpha)\\ \sec^2 x & \left(\alpha<x<\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

이므로

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=\sec^2\alpha=9$이고

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=3\cos\alpha=1$이다.

따라서 구하는 값은 $k=9-1=8$이다.

28. 정답 : ① $\frac{3}{2}$

$(x-a)\{f(x)-f'(a)x+af'(a)-f(a)\}\geq 0$에서

$x<a$일 때, $f(x)\leq f'(a)(x-a)+f(a)$이고,

$x>a$일 때, $f(x)\geq f'(a)(x-a)+f(a)$이므로

점 $(a,f(a))$는 함수 $f(x)$의 변곡점이다.

$f(x)=6e^x+tx^3+6tx+t$ 에서

$f'(x)=6e^x+3tx^2+6t$ 이고,

$f''(x)=6e^x+6tx$ 이다. $f''(a)=6e^a+6ta=0$ 이므로

$e^a+ta=0$ 이다. …… ㉠

이때 $f(a)$의 값이 $g(t)$이므로

$g(t)=f(a)=6e^a+ta^3+6ta+t$ 이다.

㉠에서 $e^a=-ta$ 이므로

$g(t)=t(a^3+1)$ 이다. …… ㉡

$t=\alpha$ 일 때, $g(\alpha)=\alpha(a^3+1)=0$ 이기 위해서는

$t=\alpha$ 에 대응되는 a의 값이 -1 이어야한다.

㉠에서 $a=-1$ 일 때, $t=\dfrac{1}{e}$ 이므로 $\alpha=\dfrac{1}{e}$ 이다.

㉠에서 양변을 t로 미분하면 $e^a\times\dfrac{da}{dt}+a+t\times\dfrac{da}{dt}=0$ 이다.

$t=\dfrac{1}{e}$, $a=-1$ 을 대입하면 $\dfrac{da}{dt}=\dfrac{e}{2}$ 이다.

㉡에서 양변을 t로 미분하면

$g'(t)=a^3+1+3ta^2\times\dfrac{da}{dt}$ 이다.

$t=\dfrac{1}{e}$, $a=-1$, $\dfrac{da}{dt}=\dfrac{e}{2}$ 를 대입하면

$g'\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{3}{2}$ 이다.

따라서 구하는 값은 $\dfrac{3}{2}$ 이다.

29. 정답 : 80

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ 로 두고 첫째항과 공비가 같은 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을 $a_n=r^n$ 으로 두자.

(단, $-1<r<1$)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(a_n)=-1$ 에서

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a(a_n)^2+b(a_n)+c\right)=-1$ 이다.

급수가 수렴하므로 극한값이 0이어야한다.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(a(a_n)^2+ba_n+c\right)=0$ 에서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 이므로 $c=0$ 이다.

또한 $f(1)=0$ 이므로 $f(x)=ax^2-ax$ 이다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(a_n)=-1$ 에서

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a(a_n)^2-aa_n\right)=-1$

$\dfrac{ar^2}{1-r^2}-\dfrac{ar}{1-r}=-1$

$\therefore a=\dfrac{1-r^2}{r}$

조건 (나)에서

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)=-\frac{2}{3}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{a\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2-a\sum_{k=1}^{n}a_k\right\}=-\frac{2}{3}$

$\dfrac{ar^2}{(1-r)^2}-\dfrac{ar}{1-r}=-\dfrac{2}{3}$ 이다.

$a=\dfrac{1-r^2}{r}$ 을 대입하면

$\dfrac{(1+r)(2r-1)}{1-r}=-\dfrac{2}{3}$

$6r^2+r-1=0$

$(2r+1)(3r-1)=0$

$r=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $r=\dfrac{1}{3}$ 이다.

$r=-\dfrac{1}{2}$ 이면 $a<0$ 이므로 최고차항의 계수가 양수인 것과 모순이다.

$\therefore r=\dfrac{1}{3}$, $a=\dfrac{8}{3}$

따라서 $f(x)=\dfrac{8}{3}x(x-1)$ 이므로 구하는 값은 $f(6)=80$ 이다.

30. 정답 : 70

$x=1$ 일 때 $0=\dfrac{g(1)}{f'(g(1))}-1$ 이고 $f(1)=1=g(1)$ 이므로

$f'(1)=1$ 이다. 이때 $f(2)=4f'(1)=4$ 이다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수 관계이므로

$f(g(x))=x$ 이고 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$ 이다.

$\displaystyle\int_x^1\frac{f(t)}{f'(g(t))\{g(t)\}^2}dt=-\int_1^x\frac{f(t)g'(t)}{\{g(t)\}^2}dt$ 이므로

$\displaystyle\int_1^x\frac{f'(t)}{g(t)}dt+\int_x^1\frac{f(t)}{f'(g(t))\{g(t)\}^2}dt$

$\displaystyle=\int_1^x\frac{f'(t)g(t)-f(t)g'(t)}{\{g(t)\}^2}dt$

$=\left[\dfrac{f(t)}{g(t)}\right]_1^x$

$=\dfrac{f(x)}{g(x)}-1$ 이다. ($\because f(1)=g(1)=1$)

즉, 주어진 항등식은 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{g(x)}{f'(g(x))}$ 이고

$f'(g(x))g'(x)=1$ 이므로 $f(x)=\{g(x)\}^2g'(x)$ 이다.

양변을 1부터 4까지 정적분하면

$$\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4\{g(x)\}^2g'(x)dx$$

$$=\int_{f(1)}^{f(2)}\{g(x)\}^2g'(x)dx$$

$$=\int_1^2 t^2dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^2=\frac{7}{3} \text{ 이다.}$$

따라서 구하는 값은 $30\times\dfrac{7}{3}=70$ 이다.