# 랑데뷰 상수

NOTE

## 공통수학1

NOTE

# 1. 다항식

◆ 개념 01 – 다항식의 연산법칙

다항식 $A$, $B$, $C$에 대하여 다음과 같은 연산법칙이 성립한다.

① 교환법칙 : $A+B=B+A$, $AB=BA$

② 결합법칙 : $(A+B)+C=A+(B+C)$, $(AB)C=A(BC)$

③ 분배법칙 : $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

◆ 개념 02 – 다항식의 덧셈과 뺄셈

① 괄호가 있는 경우 괄호부터 푼다.

(괄호 앞에 '–'가 있으면 괄호 안의 각 항의 부호를 바꾼다.)

② 다항식을 한 문자에 대해 내림차순으로 정리한다.

③ 동류항끼리 모아서 간단히 한다.

◆ 개념 03 –다항식의 곱셈

(1) 다항식의 곱셈은 분배법칙을 이용하여 다음과 같이 계산한 후, 동류항을 간단히 정리한다. 이 때, 괄호를 풀어 하나의 다항식으로 나타내는 것을 전개한다고 하고, 그 다항식을 전개식이라 한다.

(2) 곱셈 공식

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

② $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

③ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

④ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

⑤ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

⑥ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑦ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

⑧ $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

⑨ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

⑩ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

(3) 곱셈 공식의 변형

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

② $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

③ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

④ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

⑤ $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

이때, $a+b+c=0$ 또는 $a=b=c$이면 $a^3+b^3+c^3=3abc$

◆ 개념 04 - 항등식

(1) 항등식의 정의

등식에 포함된 문자에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하는 등식을 항등식이라 한다.

(2) 미정계수법

항등식에 포함된 계수를 결정하는 방법을 미정계수법이라 한다.

① 계수비교법 : 양변의 동류항의 계수를 비교하여 미정계수를 정하는 방법

② 수치대입법 : 양변의 문자에 적당한 수를 대입하여 미정계수를 정하는 방법

[랑데뷰팁]

다음 등식이 $x$ 또는 $y$에 대한 항등식일 때

① $ax+b=0$

$\Leftrightarrow$ $a=0,\ b=0$

② $ax+b=cx+d$

$\Leftrightarrow$ $a=c,\ b=d$

③ $ax^2+bx+c=0$

$\Leftrightarrow$ $a=0,\ b=0,\ c=0$

④

$ax^2+bx+c=dx^2+ex+f$

$\Leftrightarrow$ $a=d,\ b=e,\ c=f$

◆ 개념 05 - 다항식의 나눗셈

(1) 다항식 $A$를 $B$ $(B\neq 0$ )로 나눈 몫을 $Q$, 나머지를 $R$ 라 하면 다음이 성립한다. $\rightarrow A=BQ+R$ (단, ($R$의 차수)<($B$ 의 차수))

(2) 다항식의 나눗셈의 방법

① 직접 나누는 방법 : 자연수의 나눗셈처럼 나누려는 다항식으로 직접 나누는 방법

예) 다항식 $A=2x^2-7x+3$ 을 $B=x-2$ 로 나눌 때의 몫과 나머지 구하기

$$\begin{array}{r l l}
 & 2x-3 & \leftarrow \text{몫} \\
x-2\,) & 2x^2-7x+3 & \\
 & 2x^2-4x & \cdots\cdots\ (x-2)\times 2x \\
\hline
 & -3x+3 & \\
 & -3x+6 & \cdots\cdots\ (x-2)\times(-3) \\
\hline
 & -3 & \leftarrow \text{나머지}
\end{array}$$

② 조립제법 : 다항식을 $ax+b$ 로 나눌 때, 계수만을 사용하여 몫과 나머지를 구하는 방법

예) 다항식 $ax^3+bx^2+cx+d$ 을 일차식 $x-\alpha$ 로 나누었을 때,

몫 : $lx^2+mx+n$ ,

나머지 : $R$

$$\begin{array}{c|cccc}
\alpha & a & b & c & d \\
 & & l\alpha & m\alpha & n\alpha \\
\hline
 & a & b+l\alpha & c+m\alpha & d+n\alpha \\
 & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\
 & l & m & n & R
\end{array}$$

[랑데뷰팁]

나누는 식의 일차항의 계수가 1이 아닌 경우 몫과 나머지

다항식 $f(x)$를 일차식 $x+\dfrac{b}{a}$로 나눈 몫을 $Q$, 나머지를 $R$라 하면

$f(x)=\left(x+\dfrac{b}{a}\right)Q+R$

$=(ax+b)\dfrac{Q}{a}+R$

$f(x)$를 $ax+b$로 나눈 몫 : $\dfrac{Q}{a}$, 나머지 : $R$

◆ 개념 06 - 나머지 정리와 인수 정리

(1) 나머지 정리

$x$에 대한 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 $R$라 하면 $R=f(\alpha)$

(2) 인수 정리

$x$에 대한 다항식 $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지기 위한 조건은 $f(\alpha)=0$이다.

$f(\alpha)=0 \Leftrightarrow x-\alpha$가 $f(x)$의 인수

[랑데뷰팁]

(1) $x$에 대한 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지는 $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$이다.

(2) 다항식 $f(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

$\Leftrightarrow$ $f(\alpha)=0$

$\Leftrightarrow$ 다항식 $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 갖는다.

$\Leftrightarrow$ $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$

◆ 개념 07 - 인수분해의 기본 공식

① $ma+mb+mc=m(a+b+c)$

② $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

③ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

④ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

⑤ $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

⑥ $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

⑦ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

⑧ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

⑨ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

⑩ $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

[랑데뷰팁]
하나의 다항식을 두 개 또는 그 이상의 다항식의 곱의 꼴로 나타내는 것을 인수분해라 하고, 곱을 이루는 각각의 다항식을 그 다항식의 인수라 한다. 또한, 인수분해는 다항식의 전개의 역과정으로 인수분해 공식은 곱셈공식의 좌변과 우변을 바꾸어 놓은 것이다.

◆ 개념 08 - 복잡한 식의 인수분해

(1) 치환을 이용한 인수분해

① 공통부분이 드러난 경우 ➡공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해

② 공통부분이 드러나지 않은 경우 ➡공통부분이 생기도록 적당히 짝지어 전개한 후 치환하여 인수분해

(2) 복이차식의 인수분해

$x^2=X$로 치환했을 때

① 인수분해가 가능 → $X^2+aX+b$를 인수분해

② 인수분해가 불가능 → $(x^2+X)-(Bx)^2$의 꼴로 변형하여 인수분해

(3) 여러 문자를 포함한 식의 인수분해

① 여러 문자의 차수가 다를 경우 → 차수가 가장 낮은 문자에 대해 내림차순으로 정리

② 여러 문자의 차수가 같을 경우 → 어느 한 문자에 대해 내림차순으로 정리

(4) 인수정리를 이용한 인수분해

① 다항식 $f(x)$에서 $f(\alpha)=0$이 되는 $\alpha$의 값을 구한다.

$\alpha=\dfrac{(f(x)\text{의 상수항의 약수})}{(f(x)\text{의 최고차항의 계수의 약수})}$ ◀ 여러 가지의 값 중 하나를 선택

② 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫 $Q(x)$를 구한 후 다음과 같이 표현한다. $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow f(x)=(x-\alpha)Q(x)$

③ $Q(x)$가 더 이상 나누어지지 않는 다항식의 곱으로 나타날 때까지 인수분해 공식 또는 위의 ①, ②의 과정을 다시 적용한다.

[랑데뷰팁]
$x^4+ax^2+b$와 같이 짝수 차수의 항만으로 이루어진 다항식을 복이차식이라 한다.

[랑데뷰팁]
다항식 $f(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.
$\Leftrightarrow f(\alpha)=0$
$\Leftrightarrow f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지는 0이다.
$\Leftrightarrow f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ (단, $Q(x)$는 몫)
$\Leftrightarrow f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 갖는다.

## 일등급 도전

1)

다항식 $(x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5)^3$의 전개식에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[ 보 기 ]

ㄱ. 위 식을 전개하여 내림차순으로 정리하면 항이 총 15개이다.

ㄴ. 모든 항의 계수의 합은 $15^3$이다.

ㄷ. $x^{10}$의 계수는 504이다.

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2)

다항식 $x^2+ax-y^2+by-\frac{1}{4}p$가 $x$, $y$에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 된다. 세 자연수 $a$, $b$, $p$에 대하여 $b$, $p$의 값이 모두 소수가 되도록 하는 소수 $p$의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 5

④ 7 ⑤ 11

3)

등식

$(483\sqrt{483}+42\sqrt{42})\times(483\sqrt{483}-42\sqrt{42})=21^4\times m$

을 만족하는 자연수 $m$의 값은?

① 519 ② 549 ③ 579

④ 609 ⑤ 639

4)

$a$, $b$, $c$가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, 다음 두 조건을 만족시킨다. 이 삼각형의 넓이를 $S$라 할 때, $S^2$의 값은?

(가) $a^2+b^2+c^2=8$

(나) $a^4+b^4+c^4=24$

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

5)

$\frac{100\times77+1}{151}+\frac{400\times377+1}{501}+\frac{900\times877+1}{1051}$ 의 값을 구하시오.

6)

정수 $a_0$, $a_1$, $a_2$, $\cdots$ , $a_{12}$에 대하여 등식

$$\{P(x)\}^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\ \cdots\ +a_{12}x^{12}$$

이 모든 실수 $x$에 대하여 성립하고, 다음 조건을 만족한다.

(가) $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}=-32$
(나) $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=-32$
(다) $a_{12}=64$

이때, 최고차항의 계수가 양수이고, $P(0)>-2$인 다항식 $P(x)$를 구하시오.

7)

삼차식 $f(x)$와 일차식 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-2)=0$, $3-f(-1)=g(-1)$, $g(1)=8$
(나) $f(x)+g(x)$를 $x^2-1$로 나눈 나머지는 $ax+5$이다.
(다) $f(x)g(x)$를 $x^2+x-2$로 나눈 나머지는 $R(x)$이다.

$R(-5)+a$의 값은? (단, $a$는 상수이다.)

① 7　② 8　③ 9
④ 10　⑤ 11

8)

홀수인 모든 자연수 $n$과 2이상의 자연수 $m$에 대하여 다항식 $x^{n+1}(x^3-2x^2+ax+b)$를 $(x+2)^m$으로 나누었을 때의 나머지가 $2^{n+2}(x+2)$일 때, $a-b$의 값은? (단, $a$, $b$는 상수이다.)

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

9)

$a^3+2a^2b+2a^2c+ab^2+ac^2+3abc+b^2c+bc^2=105$를 만족하는 서로 다른 자연수 $a$, $b$, $c$에 대하여 $abc$의 값은?

① 8 ② 12 ③ 15
④ 20 ⑤ 24

10)

최고차항의 계수가 양수인 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$를 $x^3-g(x)$로 나눈 몫은 $x+1$이고 나머지는 $\{g(x)\}^2-x^4$이다.
(나) $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때 나머지가 1이다.

$f(0)\neq 0$일 때, $f(0)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

11)

$a$, $b$가 정수이고, $n$이 100이하의 자연수일 때, 다항식 $x^3-x^2+(ab-2)x+2n$ 중에서 $(x-2)(x-a)(x-b)$의 꼴로 인수분해 되는 다항식의 개수는?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

12)

10이하의 세 자연수 $a$, $b$, $c$가 등식 $a^3-a^2b+ab^2-ac^2-b^3+bc^2=0$을 만족시킬 때, 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는?

① 101 ② 102 ③ 103
④ 104 ⑤ 105

13)

다항식 $P(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $Q(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$\{Q(x)\}^2+\{Q(x-1)\}^2=(x^2-3x+2)P(x)$$

를 만족시킨다. $P(x)$를 $Q(x)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(3)$의 값은?
(단, 다항식 $Q(x)$의 계수는 실수이다.)

① $-18$ ② $-9$ ③ $0$
④ $9$ ⑤ $18$

14)

$(x-y-1)^3-(z-y+2)^3-(x-z-3)^3$을 인수분해 하시오.

15)

다항식 $f(x)$, $g(x)$다 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$를 $g(x)-x^3+2x^2$으로 나누었을 때의 몫은 $x^2+3$이고, 나머지는 $g(x)-kx^2$이다.
(나) $f(-1)-g(-1)=-k$, $f(3)-g(3)=-9k$
(다) $g(m)=0$인 실수 $m$는 유일하게 존재한다.

$f(2)=-12$일 때, 상수 $k$의 값은?

① $7$ ② $11$ ③ $15$ ④ $19$ ⑤ $23$

16)

최고차항의 계수가 1이며 모든 계수가 실수인 서로 다른 두 이차다항식 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\{f(x)\}^3-\{g(x)\}^3$은 $(x+1)^2$으로 나누어 떨어진다.
(나) $\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$는 $(x+3)$로 나누어 떨어진다.
(다) (다) $f(x)g(2x)$를 $(x+2)$으로 나누었을 때 나머지가 $-3$이다.

$f(0)-g(0)$은?

① $-8$ ② $-4$ ③ $0$
④ $4$ ⑤ $8$

17)

$(1+x)^{50}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{49}x^{49}+a_{50}x^{50}$라 하자. $k=a_0+a_3+a_6+\cdots+a_{48}$라 할 때, $3k+1$의 값은?

① $0$ ② $1$ ③ $2^{25}$ ④ $2^{50}$ ⑤ $2^{100}$

18)

상수 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_8$ 에 대하여 등식 $(9x^2-3x+1)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$ 이 $x$에 대한 항등식일 때,

$3a_0+a_1+\frac{a_3}{3^2}+\frac{a_5}{3^4}+\frac{a_7}{3^6}$의 값은?

① $-127$ ② $-125$ ③ $-123$
④ $-120$ ⑤ $-117$

19)

다항식 $f(x)$ 를 $2x+1$ 로 나눈 몫은 $Q(x)$ 이고 나머지는 3 이다. 이때, $(x+1)f(x)$ 를 $x+\frac{1}{2}$ 로 나눈 몫과 나머지를 차례대로 나열한 것은?

① $xQ(x)+3$ , $3$
② $(x+1)Q(x)+3$ , $\frac{3}{2}$
③ $2(x+1)Q(x)+3$ , $\frac{3}{2}$
④ $2(x+1)Q(x)+3$ , $3$
⑤ $3(x+1)Q(x)+3$ , $3$

20)

다항식 $f(x)=2x^3-3x^2+x-5$일 때, $f(2.01)$의 값은?

① $1.01392$ ② $1.13902$ ③ $1.13092$
④ $1.130902$ ⑤ $1.013092$

21)

$2^{2021}$을 15로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

22)

$2^{2020}+2^{2021}+2^{2022}+2^{2023}$을 7로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

23)

실수 $x$, $y$, $z$가 $x>y>z>0$이고

$x(z^2+y^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)=x^3+y^3+z^3+2xyz$

을 만족할 때, $x^2-y^2+z^2-2zx+\dfrac{x}{y+z}$의 값을 구하시오.

24)

실수 $x$, $y$, $z$에 대하여 $xyz=x+y+z=k$일 때,

$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)$
$=12$

이다. $k$의 값을 구하시오. (단, $k$는 상수이다.)

25)

모든 실수 $x$에 대하여 등식

$x^{10}+1=a_{10}(x+2)^{10}+a_9(x+2)^9+\cdots+a_1(x+2)+a_0$

이 성립할 때, $a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2$의 값은? (단, $a_0$, $a_1$, $\cdots$, $a_9$, $a_{10}$은 상수이다.)

① $\dfrac{3(3^9+1)}{2}$ ② $\dfrac{3^{10}-2^{11}+1}{2}$ ③ $\dfrac{3^{10}-2^{11}-1}{2}$

④ $3^{10}+3$ ⑤ $2$

26)

다음 식의 값을 구하시오.

$$\frac{(8^4+64)(16^4+64)(24^4+64)}{(4^4+64)(12^4+64)(20^4+64)}$$

27)

$f_n(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\ \cdots\ (x-n)$

로 정의할 때,

$2x^4-3x^3-4x^2+x-5$

$=a\cdot f_4(x)+b\cdot f_3(x)+c\cdot f_2(x)+d\cdot f_1(x)+e$

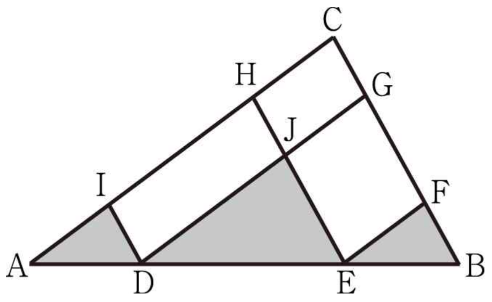
로 나타낼 수 있다. 이때, $a+b+c+d+e$의 값을 구하시오. (단, $a$, $b$, $c$, $d$는 실수)

28)

다항식 $f(x)$를 $x^2+x+1$, $x^2-x+1$로 나눈 나머지가 각각 $2x+1$, $-2x+1$이다. 이때, $f(x)$를 $x^4+x^2+1$로 나눈 나머지를 구하시오.

29)

다음 그림은 $\overline{\mathrm{DI}} /\!/ \overline{\mathrm{EH}} /\!/ \overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{AC}} /\!/ \overline{\mathrm{DG}} /\!/ \overline{\mathrm{EF}}$인 삼각형 ABC이다.




이때, $\triangle\mathrm{ADI}=a^2$, $\triangle\mathrm{DEJ}=b^2$, $\triangle\mathrm{EBF}=c^2$이고 $a^2+b^2+c^2=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}$일 때,

$$(3a-2b+c)\left(\frac{1}{a}-\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)$$

의 값을 구하시오.

30)

$x$에 대한 다항식 $ax^{13}+bx^{12}-1$이 $x^2+x-1$로 나누어 떨어질 때, $a$의 값을 구하시오. (단, $a$, $b$는 상수이다.)

# 세미나(1)-곱셈 공식

① $(a+b+c)^3=(a+b+c)\{(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\}$
$+3(a+b+c)(ab+bc+ca)$

② $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

③ $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=(a+b)(b+c)(c+a)$

[관련 문제]

(1) 모든 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여

$(x+y+z)^3$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+A(x+y+z)(xy+yz+zx)$

$=x^3+y^3+z^3+B(x+y)(y+z)(z+x)$

가 성립할 때, 상수 $A,\ B$에 대하여 $A+B$의 값을 구하여라.

(2) $a+b+c=4,\ ab+bc+ca=3,\ abc=6$일 때, $(a+b)(b+c)(c+a)$의 값을 구하여라.

## 일반 풀이

(1) 위의 등식은 $x,\ y,\ z$에 대한 항등식이므로

(i)

$(x+y+z)^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
$+A(x+y+z)(xy+yz+zx)$

위의 등식의 양변에 $x=y=z=1$을 대입하면

$27=9A \quad \therefore\ A=3$

(ii)

$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+B(x+y)(y+z)(z+x)$

위의 등식의 양변에 $x=y=z=1$을 대입하면

$27=3+8B \quad \therefore\ B=3$

(i), (ii)에서 $A+B=6$

(2) $a+b+c=4$에서

$a+b=4-c,\ b+c=4-a,\ c+a=4-b$

$\therefore (a+b)(b+c)(c+a)$

$=(4-c)(4-a)(4-b)$

$=4^3-4^2(a+b+c)+4(ab+bc+ca)-abc$

$=64-16\cdot4+4\cdot3-6=6$

## 랑데뷰 풀이

(1) 공식 ①,② 증명

① $(x+y+z)^3$

$=(x+y+z)(x+y+z)^2$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)$

$=(x+y+z)\{(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
$+(3xy+3yz+3zx)\}$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
$+3(x+y+z)(xy+yz+zx)$

② $\{(x+y)+z\}^3$

$=(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3$

$=x^3+y^3+z^3+3xy(x+y)+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2$

$=x^3+y^3+z^3+3(x+y)\{xy+(x+y)z+z^2\}$

$=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)$

(2) 공식 ③ 증명

$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)c+ab\}-abc$

$=(a+b)^2c+ab(a+b)+(a+b)c^2$

$=(a+b)\{(a+b)c+ab+c^2\}$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$

## 세미나(2)-나눗셈 관련 항등식

다항식 $f(x)$를 다항식 $A(x)$로 나눌 때, 나머지가 $R_1(x)$이고

$B(x)$로 나눌 때, 나머지가 $R_2(x)$일 때

$f(x)$를 다항식 $A(x)B(x)$로 나눌 때 나머지는 $aA(x)+R_1(x)$이다.

(단, $A(x)$의 차수 $\geq$ $B(x)$의 차수)

(만약 $A(x)$, $B(x)$가 모두 이차식이면 나머지는 $(ax+b)A(x)+R_1(x)$꼴)

[관련 문제]

(1) 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 3이고, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 23일 때, $f(x)$를 $x^2-2x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

(2) 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지는 $2x+1$이고, $(x-1)(x-3)$으로 나눈 나머지는 $6x-3$이다. 이때, $f(x)$를 $(x-1)(x-2)(x-3)$으로 나눈 나머지를 구하여라.

### 일반 풀이

(1) $f(x)$를 $x^2-2x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ 라 하면

$f(x)=(x^2-2x-3)Q(x)+ax+b$

$\quad =(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$

이때 나머지정리에 의하여

$f(-1)=3,\ f(3)=23$이므로

$-a+b=3,\ 3a+b=23$

앞의 두 식을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=8$

따라서 구하는 나머지는 $5x+8$이다.

(2) $f(x)=(x-1)(x-2)Q_1(x)+2x+1$

$f(x)=(x-1)(x-3)Q_2(x)+6x-3$

에서 $f(1)=3$, $f(2)=5$, $f(3)=15$

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$ 라고 하고,

$x=1$, 2, 3 을 각각 대입하면

$f(1)=a+b+c=3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=4a+2b+c=5 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$f(3)=9a+3b+c=15 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉠,㉡,㉢에서 $a=4$, $b=-10$, $c=9$

따라서 나머지는 $4x^2-10x+9$ 이다.

### 랑데뷰 풀이

(1) $f(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+a(x+1)+3$ 이고

$f(3)=23$에서

$f(3)=4a+3=23 \quad \therefore a=5$

따라서 구하는 나머지는 $5x+8$이다.

또는

$f(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+a(x-3)+23$이고

$f(-1)=3$에서

$f(-1)=-4a+23=3 \quad \therefore a=5$

따라서 구하는 나머지는 $5x+8$이다.

(2) $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)$
$\qquad +a(x-1)(x-2)+2x+1$

$f(3)=15$ 에서 $f(3)=2a+7=15 \quad \therefore a=4$

따라서 나머지는

$4(x-1)(x-2)+2x+1=4x^2-10x+9$

또는

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)$
$\qquad +a(x-1)(x-3)+6x-3$

$f(2)=5$ 에서 $f(2)=-a+9=5 \quad \therefore a=4$

따라서 나머지는

$4(x-1)(x-3)+6x-3=4x^2-10x+9$

## 세미나(3)-조립제법의 고찰

조립제법은 제수가 이차식 이상일 때도 사용할 수 있다.

예를 들어 $(ax^3+bx^2+cx+d)\div(x^2+px-q)$

을 조립제법을 이용하여 구할 때 표의 왼쪽에 오는 수는

$x^2+px-q=0$에서 $x^2=q-px$의 우변의 상수항과 계수들을 세로로 나열시킨 뒤 맨 아랫줄의 수들과 곱한 수는 같은 줄에 오도록 한다.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $q$ | | | $aq$ | $-apq+bq$ |
| $-p$ | | $-ap$ | $ap^2-bp$ | |
| | $a$ | $b-ap$ | $c+aq+ap^2-bp$ | $d-apq+bq$ |

[관련 문제]

다항식 $x^3+ax^2+bx+4$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어질 때, 상수 $a$, $b$을 구하여라.

### 일반 풀이

주어진 다항식을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^3+ax^2+bx+4=(x-1)^2Q(x)$ ······ ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b+4=0$ $\quad\therefore b=-a-5$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^3+ax^2-ax-5x+4=(x-1)^2Q(x)$

$(x-1)\{x^2+(a+1)x-4\}=(x-1)^2Q(x)$

양변을 $x-1$로 나누면

$x^2+(a+1)x-4=(x-1)Q(x)$

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+1-4=0$

$\therefore a=2$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $b=-7$

### 랑데뷰 풀이

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $a$ | $b$ | $4$ |
| $-1$ | | | $-1$ | $-a-2$ |
| $2$ | | $2$ | $2a+4$ | |
| | $1$ | $a+2$ | $2a+b+3$ | $-a+2$ |

$2a+b+3=0$, $-a+2=0$

$a=2$, $b=-7$

# 세미나(4)-다항식 변환의 자유자재

식의 값이 주어진 다항식은 자유자재로 변형이 가능하다.
예를 들어 $f(1)=1, f(2)=2, f(3)=4$을 만족하는 이차식은
$f(x)=a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c$ 또는
$f(x)=a(x-1)(x-2)+b(x-2)+c$ 등으로 나타내어 미정계수를 찾으면 된다.

[관련 문제] 5이하의 자연수 $n$에 대하여 사차다항식 $f(x)$를 $x-n$으로 나누었을 때의 나머지가 $\frac{1}{n}$일 때, $f(x)$를 $x-6$으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

## 일반 풀이

$1 \le n \le 5$일 때, 나머지정리에 의하여 $f(n)=\frac{1}{n}$

이므로 $nf(n)=1$ $\quad\therefore nf(n)-1=0$

$g(x)=xf(x)-1$이라 하면

$g(1)=0, g(2)=0, g(3)=0, g(4)=0, g(5)=0$

즉 다항식 $g(x)$는 $x-1, x-2, \cdots, x-5$를 인수로 가지므로 상수 $a$에 대하여

$g(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$

로 놓을 수 있다. 이때 $g(0)=-1$이므로

$g(0)=a\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)=-1$

따라서 $a=\frac{1}{120}$이므로

$$g(x)=\frac{1}{120}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

$$\therefore g(6)=\frac{1}{120}\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=1$$

그런데 $g(6)=6f(6)-1$이므로

$$1=6f(6)-1 \qquad \therefore f(6)=\frac{1}{3}$$

이 문제는 일반 풀이가 간편하다. 그러나 다음 문제를 풀어보자. → 삼차다항식 $f(x)$에 대하여 $f(k)=2^k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$이 성립할 때, $f(5)$의 값을 구하여라. 정답:30

## 랑데뷰 풀이

$f(1)=1, f(2)=\frac{1}{2}, f(3)=\frac{1}{3}, f(4)=\frac{1}{4}, f(5)=\frac{1}{5}$

에서

$$f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$
$$+b(x-1)(x-2)(x-3)+c(x-1)(x-2)$$
$$+d(x-1)+e$$

라 두면

$f(1)=1$에서 $e=1$

$f(2)=\frac{1}{2}$에서 $d=-\frac{1}{2}$

$f(3)=\frac{1}{3}$에서 $c=\frac{1}{6}$

$f(4)=\frac{1}{4}$에서 $b=-\frac{1}{24}$

$f(5)=\frac{1}{5}$에서 $a=\frac{1}{120}$

$$f(x)=\frac{1}{120}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$
$$-\frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)+\frac{1}{6}(x-1)(x-2)$$
$$-\frac{1}{2}(x-1)+1$$

따라서 $f(6)=\frac{1}{3}$

# 세미나(5)-합동식

## 합동식

$a \equiv b \pmod{k}$ →정수 $a$, $b$를 자연수 $k$로 나눈 나머지가 같다.

합동식의 기본 성질

임의의 정수 $a, b, c, d, k$ $(k>0)$에 대하여 다음이 성립한다.

① 합・차 $a \equiv b \pmod{k}$, $c \equiv d \pmod{k}$이면 $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{k}$

② 곱 $a \equiv b \pmod{k}$, $c \equiv d \pmod{k}$이면 $ac \equiv bd \pmod{k}$

③ 거듭제곱 $a \equiv b \pmod{k}$이면 임의의 자연수 $n$에 대하여 $a^n \equiv b^n \pmod{k}$이다.

[관련 문제]

(1) $2^{1001}$을 15로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

(2) $2^{1000}+2^{1001}+2^{1002}+2^{1003}$을 7로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

### 일반 풀이

(1) $2^{1001}=(2^4)^{250}\cdot 2=2\cdot 16^{250}$

$2x^{250}$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

나머지를 $R$($R$는 상수)라 하면

$$2x^{250}=(x-1)Q(x)+R \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $R=2$

㉠의 양변에 $x=16$을 대입하면

$$2\cdot 16^{250}=(16-1)Q(16)+2$$

$$\therefore\ 2^{1001}=15Q(16)+2$$

따라서 $2^{1001}$을 15로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

(2) $2^3=8=x$로 놓으면

$2^{1000}+2^{1001}+2^{1002}+2^{1003}=$

$2\cdot(2^3)^{333}+4\cdot(2^3)^{333}+(2^3)^{334}+2\cdot(2^3)^{334}$

$=6\cdot 8^{333}+3\cdot 8^{334}=6x^{333}+3x^{334}$

$6x^{333}+3x^{334}$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

나머지를 $R$ ($R$는 상수)라 하면

$6x^{333}+3x^{334}=(x-1)Q(x)+R \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $R=6+3=9$

㉠의 양변에 $x=8$을 대입하면

$6\cdot 8^{333}+3\cdot 8^{334}=7Q(8)+9=7\{Q(8)+1\}+2$

따라서 구하는 나머지는 2이다.

### 랑데뷰 풀이

(1) $2^4 \equiv 1 \pmod{15}$

$(2^4)^{250} \equiv 1^{250} \pmod{15}$→$2^{1000} \equiv 1 \pmod{15}$

$\therefore\ 2^{1001} \equiv 2 \pmod{15}$

(2) $2^3 \equiv 1 \pmod 7$에서 $2^{999} \equiv 1 \pmod 7$이므로

$2^{1000} \equiv 2 \pmod 7$, $2^{1001} \equiv 4 \pmod 7$,

$2^{1002} \equiv 1 \pmod 7$, $2^{1003} \equiv 2 \pmod 7$ 이다.

따라서 $2^{1000}+2^{1001}+2^{1002}+2^{1003} \equiv 2 \pmod 7$

합동식의 기본 성질 증명

① $a \equiv b \pmod{k}$, $c \equiv d \pmod{k}$이므로

$a-b=kp$, $c-d=kq$ 이고 양변을 ±하면

$(a\pm c)-(b\pm d)=k(p\pm q)$이므로 정의에 따라

$a\pm c \equiv b\pm d \pmod{k}$

② $a \equiv b \pmod{k}$, $c \equiv d \pmod{k}$

$a-b=kp$, $c-d=kq$ 이고 각각에 $c$와 $b$를

곱하면 $ac-bc=kpc$, $bc-bd=kqb$이고 양변을

더하면 $ac-bd=k(pc+qb)$이므로 정의에

따라 $ac \equiv bd \pmod{k}$

③ $a \equiv b \pmod{k}$ 이므로 $a-b=kp$이다.

한편

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$에서

$a^n-b^n=kp(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$이므로

정의에 따라 $a^n \equiv b^n \pmod{k}$

# 세미나(6)-헤론 공식을 이용한 식 정리

## Heron의 공식

세 변의 길이가 $a,b,c$인 삼각형의 넓이 $S$는

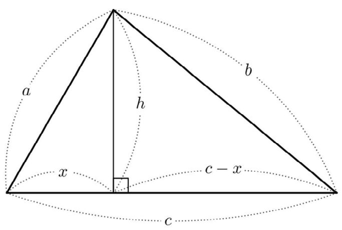
$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ \left(단,\ s=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

$$\to S=\frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)}$$

**[관련 문제]** $a,\ b,\ c$가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $a^2+b^2+c^2=6$, $a^4+b^4+c^4=14$라 한다. 이 때 이 삼각형의 넓이를 구하여라.

### 일반 풀이

오른쪽 그림에서 피타고라스의 정리에 의하여




$a^2=x^2+h^2$ $\cdots$ ①

$b^2=h^2+(c-x)^2$

$\quad=h^2+c^2-2cx+x^2$ $\cdots$ ②

①, ②에서

$b^2=c^2-2cx+a^2$ $\quad\therefore x=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}$

따라서 ①에서

$$h^2=a^2-x^2=a^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2$$

$$=\frac{-(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{4c^2}$$

$(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=(a^2+b^2+c^2)^2-(a^4+b^4+c^4)$

$\quad=6^2-14=22$

따라서 삼각형의 넓이를 $S$라고 하면

$$S^2=\left(\frac{1}{2}ch\right)^2=\frac{1}{4}c^2h^2$$

$$=\frac{-(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{16}=\frac{-14+22}{16}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore S=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

### 랑데뷰 풀이

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{6^2-2\times 14}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

### 설명

① 헤론 공식 증명

$\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}$

$=\sqrt{(1+\cos B)(1-\cos B)}$ ←코사인법칙

$=\sqrt{\left(1+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)\left(1-\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)}$

$=\sqrt{\dfrac{(c+a)^2-b^2}{2ca}\cdot\dfrac{b^2-(c-a)^2}{2ca}}$

$=\dfrac{\sqrt{(c+a+b)(c+a-b)(b+c-a)(b-c+a)}}{2ca}$

$c+a+b=2s$ 라 두면 $c+a-b=2s-2b=2(s-b)$,

$b+c-a=2s-2a=2(s-a)$, $b-c+a=2s-2c=2(s-c)$

$\sin B=\dfrac{\sqrt{2s\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-c)}}{2ca}$

$\quad=\dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{ca}$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}ca\cdot\dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{ca}$

$\quad=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

② 헤론 공식 변형

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $\left(단,\ s=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$

$S=\sqrt{\dfrac{(a+b+c)}{2}\dfrac{(-a+b+c)}{2}\dfrac{(a-b+c)}{2}\dfrac{(a+b-c)}{2}}$

$=\dfrac{1}{4}\sqrt{\{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}}$

$=\dfrac{1}{4}\sqrt{(a+b)^2c^2-(a^2-b^2)^2-c^4+(a-b)^2c^2}$

$=\dfrac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}$

$=\dfrac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)}$

# 세미나(7)-브라마굽타 항등식

## 브라마굽타-피보나치 항등식

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

[관련 문제] $a^2+b^2=2$, $c^2+d^2=2$, $ac+bd=\frac{1}{2}$일 때, $ad-bc$의 값을 구하여라. (단, $ad>bc$)

### 일반 풀이

먼저 $ac+bd=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하여 $a^2c^2+b^2d^2$을 구한다.

$ac+bd=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$(ac+bd)^2=\frac{1}{4}$

$a^2c^2+2abcd+b^2d^2=\frac{1}{4}$

$\therefore a^2c^2+b^2d^2=\frac{1}{4}-2abcd \quad \cdots\cdots ㉠$

$a^2+b^2=2$, $c^2+d^2=2$ 이므로

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=4$

$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=4$

이 식에 ㉠을 대입하면

$a^2d^2+b^2c^2+\frac{1}{4}-2abcd=4$

$(ad-bc)^2+\frac{1}{4}=4 \qquad \therefore (ad-bc)^2=\frac{15}{4}$

그런데 $ad>bc$이므로

$ad-bc=\frac{\sqrt{15}}{2}$

### 랑데뷰 풀이

브라마굽타-피보나치 항등식

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ 에서

$2\times 2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+(ad-bc)^2$ 이므로

$(ad-bc)^2=\frac{15}{4}$

그런데 $ad>bc$이므로

$ad-bc=\frac{\sqrt{15}}{2}$

브라마굽타-피보나치 항등식의 응용

$$(a^2+kb^2)(c^2+kd^2)=(ac+kbd)^2+k(ad-bc)^2$$
$$=(ac-kbd)^2+k(ad+bc)^2$$

# 세미나(8)-오일러 분수식

## 오일러 분수식

$$k=-\frac{a^n}{(a-b)(c-a)}-\frac{b^n}{(a-b)(b-c)}-\frac{c^n}{(c-a)(b-c)}$$

| $n$ | $k$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 3 | $a+b+c$ |
| 4 | $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$ |

[관련 문제]

한 자리의 세 자연수 $a, b, c$에 대하여 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=114$가 성립할 때,
세 수 $a, b, c$의 곱 $abc$의 값을 구하여라.

### 일반 풀이

주어진 등식의 좌변을 인수분해 하면

$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

$=a^3(b-c)+b^3c-b^3a+c^3a-c^3b$

$=a^3(b-c)-(b^3-c^3)a+bc(b^2-c^2)$

$=a^3(b-c)-(b-c)(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)(b-c)$

$=(b-c)(a^3-ab^2-abc-ac^2+b^2c+bc^2)$

$=(b-c)\{a(a^2-b^2)-bc(a-b)-c^2(a-b)\}$

$=(b-c)\{a(a+b)(a-b)-bc(a-b)-c^2(a-b)\}$

$=(b-c)(a-b)(a^2+ab-bc-c^2)$

$=(b-c)(a-b)\{(a^2-c^2)+b(a-c)\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)$ ⋯ ㉠

우변을 소인수 분해하면 $114=2\times3\times19$이고,

$c<b<a$라고 해도 일반성을 잃지 않으므로

㉠에서

$a+b+c=19,\ a-c=3,\ a-b=2,\ b-c=1$

이 성립하므로 $a=8, b=6, c=5$이다.

따라서 $abc=240$

### 랑데뷰 풀이

$$k=-\frac{a^n}{(a-b)(c-a)}-\frac{b^n}{(a-b)(b-c)}-\frac{c^n}{(c-a)(b-c)}$$

에서 $n=3, k=a+b+c$인 경우이므로

대입 후 양변에 $(a-b)(b-c)(c-a)$를 곱하면

$(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

$=-a^3(b-c)-b^3(c-a)-c^3(a-b)=-114$

$c<b<a$ 라고 해도 일반성을 잃지 않으므로

$(a+b+c)(a-c)(a-b)(b-c)=19\times3\times2\times1$

(또는 $=19\times3\times1\times2$)

따라서

$a=8, b=6, c=5$이다.

따라서 $abc=240$

# 세미나(9)-대칭식

## 대칭식

: 여러 변수로 된 대수식에서 어떤 두 변수의 위치를 서로 바꾸어도 같은 식이 되는 식

(1) $x, y, z$에 대한 대수식 $f(x, y, z)$에서

① $f(x, y, z)=x^2+y^2-2xy-z^2$와 같이 $x, y$를 바꾸어도 같은 식이 되면 $x, y$에 대한 대칭식,

② $f(x, y, z)=x^2-y^2-2xz+z^2$와 같이 $x, z$를 바꾸어도 같은 식이 되면 $x, z$에 대한 대칭식,

③ $f(x, y, z)=x^2-y^2-2yz-z^2$와 같이 $y, z$를 바꾸어도 같은 식이 되면 $y, z$에 대한 대칭식,

④ $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2+2xyz$와 같이 $x, y, z$중 어떤 두 문자를 바꾸어도 같은 식이 되면 **대칭식**

(2) 대칭식 중 모든 항의 차수가 같으면 동차대칭식이라 한다.

예를 들어 $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2+2xyz$은 대칭식이지만 $x^2, y^2, z^2$은 2차이고 $2xyz$는 3차이기 때문 동차대칭식은 아니다. $f(x, y, z)=x^3+y^3+z^3+2xyz$은 동차대칭식이며 차수가 모두 3차이므로 3차 동차대칭식이라 한다.

(3) 기본대칭식은 가장 간단히 나타낼 수 있는 대칭식이며 다음과 같다.

① 두 문자에 관한 식 : $x+y,\ xy$

② 세 문자에 관한 식 : $x+y+z,\ xy+yz+zx,\ xyz$

③ 네 문자에 관한 식 : $x+y+z+u,\ xy+xz+xu+yz+yu+zu,\ xyz+xyu+xzu+yzu,\ xyzu$

(4) $f(x, y, z)=x^2y+y^2z+z^2x$와 같이 $x \to y,\ y \to z,\ z \to x$로 문자의 순서가 윤환한 후에도 대수식이 변하지 않으면 이런 대수식을 윤환대칭식이라고 한다.

(5) 대칭식의 성질

① 서로 같은 문자의 대칭식의 사칙연산의 결과는 대칭식이다.

⇨ $x+y,\ xy$은 대칭식이고 $x+y+xy,\ x+y-xy,\ (x+y)xy,\ \dfrac{x+y}{xy}$은 모두 대칭식이다.

② 대칭식이 어떤 형태의 항을 포함하면 반드시 이 형태와 같은 종류의 항을 포함한다.

⇨ $x, y, z$에 대한 2차 동차대칭식에서 $ax^2$이 포함되면 반드시 $ay^2, az^2$이 포함되어야 하며 $bxy$이 포함되면 반드시 $byz, bzx$이 포함되어 있다.

그래서 2차 동차 대칭식의 일반식은 $a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+yz+zx)$이다.

③ 모든 대칭식은 기본대칭식으로 표현이 가능하다. ($A,\ B,\ C,\ D$는 상수)

㉠ 문자가 2개인 2차 대칭식 : $A(x+y)^2+Bxy$

㉡ 문자가 2개인 3차 대칭식 : $A(x+y)^3+B(x+y)xy$

㉢ 문자가 3개인 2차 대칭식 : $A(x+y+z)^2+B(xy+yz+zx)$

㉣ 문자가 3개인 3차 대칭식 : $A(x+y+z)^3+B(x+y+z)(xy+yz+zx)+Cxyz$

㉤ 문자가 3개인 4차 대칭식 : $A(x+y+z)^4+B(x+y+z)^2(xy+yz+zx)$
$+C(x+y+z)xyz+D(xy+yz+zx)^2$

# 세미나(10)-기본 대칭식

## 모든 대칭식은 기본대칭식으로 표현이 가능하다.

[관련 문제] $x+y+z=a$, $xy+yz+zx=b$, $xyz=c$ 일 때, 다음 각 식을 $a, b, c$ 로 나타내어라.

(1) $x^2+y^2+z^2$  (2) $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$

(3) $(x+y)(y+z)(z+x)$  (4) $(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)$

### 일반 풀이

(1) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

에 대입하면 $a^2=x^2+y^2+z^2+2b$

$\therefore\ x^2+y^2+z^2=a^2-2b$

(2)

$(xy+yz+zx)^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$

에 대입하면 $b^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2\cdot c\cdot a$

$\therefore x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=b^2-2ac$

(3) $x+y+z=a$에서

$x+y=a-z,\ y+z=a-x,\ z+x=a-y$이므로

$(x+y)(y+z)(z+x)=(a-z)(a-x)(a-y)$

$=a^3-(x+y+z)a^2+(xy+yz+zx)a-xyz$

$=a^3-a\cdot a^2+b\cdot a-c=ab-c$

(4) $x^2+y^2+z^2=t$로 놓으면

$x^2+y^2=t-z^2,\ y^2+z^2=t-x^2,\ z^2+x^2=t-y^2$

$\therefore$(준 식)$=(t-z^2)(t-x^2)(t-y^2)$

$=t^3-(x^2+y^2+z^2)t^2+(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)t-x^2y^2z^2$

$=t^3-t\cdot t^2+(b^2-2ac)\cdot t-c^2$

$=(b^2-2ac)(a^2-2b)-c^2$

$=a^2b^2-2a^3c-2b^3+4abc-c^2$

### 랑데뷰 풀이

(1) 문자가 3개이고 2차식이므로

$x^2+y^2+z^2=A(x+y+z)^2+B(xy+yz+zx)$에서

양변 계수를 비교하면 $A=1$이고

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2+B(xy+yz+zx)$에서

$x=1,\ y=-1,\ z=0$을 대입하면 $B=-2$이므로

$x^2+y^2+z^2=a^2-2b$

(2) 문자가 3개이고 4차식이므로

$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$

$=A(x+y+z)^4+B(x+y+z)^2(xy+yz+zx)$

$+C(x+y+z)xyz+D(xy+yz+zx)^2$에서

양변 계수를 비교하면 $A=0,\ B=0,\ D=1$이고

$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$

$=C(x+y+z)xyz+(xy+yz+zx)^2$에서

$x=1,\ y=1,\ z=1$을 대입하면 $C=-2$이므로

$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$

$=(xy+yz+zx)^2-2(x+y+z)xyz=b^2-2ac$

(3) 문자가 3개이고 3차식이므로

$(x+y)(y+z)(z+x)$

$=A(x+y+z)^3+B(x+y+z)(xy+yz+zx)+Cxyz$

에서 양변 계수를 비교하면 $A=0$이다.

$(x+y)(y+z)(z+x)$

$=B(x+y+z)(xy+yz+zx)+Cxyz$이고

양변에 $x=1, y=1, z=0$대입하면 $B=1$

양변에 $x=2, y=-1, z=-1$대입하면 $C=-1$

$(x+y)(y+z)(z+x)$

$=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz=ab-c$

(4) 문자가 3개이고 6차식이므로

$(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)$

$=A(x+y+z)^6+B(x+y+z)^4(xy+yz+zx)$

$+C(x+y+z)^3(xyz)+D(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2$

$+E(x+y+z)(xy+yz+zx)(xyz)+F(xy+yz+zx)^3$

$+G(xyz)^2$에서 계수를 비교하면 $A=B=0$

양변에 $x=1,y=-1,z=0$ 대입하면 $F=-2$

양변에 $x=1,y=1,z=0$ 대입하면 $2=4D+F$에서 $D=1$ $x=2,y=-1,z=-1$ 대입하면 $G=-1$

$x=1,y=1,z=1$과 $x=1,y=1,z=-1$ 대입하여 연립방정식을 세운 뒤 풀면 $C=-2,\ E=4$

$(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)$

$=-2(x+y+z)^3(xyz)+(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2$

$+4(x+y+z)(xy+yz+zx)(xyz)-2(xy+yz+zx)^3$

$-(xyz)^2=-2a^3c+a^2b^2-2b^3+4abc-c^2$

# 세미나(11)-대칭식을 이용한 인수분해

## 대칭식에서 $x+y$가 인수이면 $y+z,\ z+x$도 인수이다.

(1) [대칭식이 어떤 형태의 항을 포함하면 반드시 이 형태와 같은 종류의 항을 포함한다.]의 대칭식의 성질을 이용하여 $x+y$가 인수 이면 $y+z,\ z+x$도 인수임을 직관적으로 이해할 수 있다.

(2) $x,\ y,\ z$의 대칭식 $f(x,\ y,\ z)$가 $x+y$를 인수로 가지면 $f(x,\ -x,\ z)=0$을 만족한다.
역으로 $f(x,\ -x,\ z)=0$을 만족하면 $f(x,\ y,\ z)$은 $x+y$를 인수로 갖는다. 대칭식의 정의에 의해
$f(x,\ -x,\ z)=0 \rightarrow f(z,\ -x,\ x)=0 \rightarrow f(z,\ x,\ -x)=0$에서 $z$을 $x$로, $x$을 $y$로 바꾸면
$f(x,\ y,\ -y)=0$이고 이것은 $f(x,\ y,\ z)$가 $y+z$를 인수로 갖는 것을 의미한다.
또한 $f(x,\ -x,\ z)=0 \rightarrow f(-x,\ x,\ z)=0 \rightarrow f(-x,\ z,\ x)=0$에서 $z$을 $y$로, $x$을 $z$로 바꾸면
$f(-z,\ y,\ z)=0$이고 이것은 $f(x,\ y,\ z)$가 $z+x$를 인수로 갖는 것을 의미한다.
따라서 $x+y$가 인수 이면 $y+z,\ z+x$도 인수이다.

① $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ 을 인수분해 하여라.

**풀이** $f(x,\ y,\ z)=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$라 두면 $f(x,\ y,\ z)$는 3차 대칭식이고
$f(x,\ -x,\ z)=(x-x+z)^3-x^3-(-x)^3-z^3=z^3-z^3=0$ 이므로 $f(x,\ y,\ z)$는 $x+y$를 인수로 갖는다.
따라서 대칭식의 성질에 의해 $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=A(x+y)(y+z)(z+x)$이고 $x=1, y=1, z=1$을 대입하면 $24=8A$에서 $A=3$
$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(z+x)$

② $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$ 을 인수분해 하여라.

**풀이** $f(a,\ b,\ c)=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$ 라 두면 $f(a,\ b,\ c)$는 3차 대칭식이고
$f(a,\ -a,\ c)=a^2(-a+c)+a^2(c+a)+c^2(a-a)+2a(-a)c=-a^3+a^2c+a^2c+a^3-2a^2c=0$
이므로 $f(a,\ b,\ c)$는 $a+b$를 인수로 갖는다. 따라서 대칭식의 성질에 의해
$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc=A(a+b)(b+c)(c+a)$에
$a=b=c=1$을 대입하면 $2+2+2+2=8A$이므로 $A=1$
$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc=(a+b)(b+c)(c+a)$

③ $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$ 을 인수분해 하여라.

**풀이** $f(a,\ b,\ c)=(a+b)(b+c)(c+a)+abc$라 두면 $f(a,\ b,\ c)$는 3차 대칭식이고
$f(a,\ -a,\ c)=-a^2c\neq0$이므로 대칭식이지만 $a+b$를 인수로 갖지 않는다. 따라서 $A(a+b)(b+c)(c+a)$ 꼴로는 인수분해 되지 않는다. 대칭식이므로 기본 대칭식으로 표현해 보면
$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=A(a+b+c)^3+B(a+b+c)(ab+bc+ca)+Cabc$이고 계수 비교하면 $A=0$
$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=B(a+b+c)(ab+bc+ca)+Cabc$에 $a=1, b=-1, c=1$을 대입하면
$-1=-B-C$ 이고 $a=1, b=1, c=-2$을 대입하면 $0=-2C$ 따라서 $B=1,\ C=0$
$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

# 세미나(12)-교대식

## 교대식

: 여러 변수로 된 대수식에서 어떤 두 변수의 위치를 서로 바꾸어 놓았을 때, 양음의 부호만 바뀌는 식

(1) $x,\ y,\ z$에 대한 대수식 $f(x,\ y,\ z)$에서

① $f(x,y,z)=(x-y)(y+z)(z+x)$와 같이 $x,\ y$를 바꾸면 부호만 다른 식이 되면 $x,\ y$에 대한 교대식,

② $f(x,y,z)=(x-y)^2(y-z)(z-x)^2$와 같이 $y,z$를 바꾸면 부호만 다른 식이 되면 $y,z$에 대한 교대식,

③ $f(x,y,z)=(x-z)(x+y+z)$와 같이 $x,\ z$를 바꾸면 부호만 다른 식이 되면 $x,\ z$에 대한 교대식,

③ $f(x,y,z)=(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$와 같이 $x,\ y,\ z$중 어떤 두 문자를 바꾸어도 부호만 다른 식이 되면 **교대식**이라고 한다.

(2) 교대식의 성질 : 교대식 $f(x,\ y,\ z)$은 $(x-y)(y-z)(z-x)$을 인수로 갖는다.

→ 교대식 $f(x,\ y,\ z)$은 $f(x,\ y,\ z)=-f(y,\ x,\ z)$을 만족하고 이 식에 $y$대신 $x$를 대입하면 $f(x,\ x,\ z)=-f(x,\ x,\ z)$이므로 $f(x,\ x,\ z)=0$이 된다. 따라서 $f(x,\ y,\ z)$에 $y$대신 $x$대입하면 0이 되므로 $f(x,\ y,\ z)$은 $x-y$를 인수로 갖는다. 같은 방법으로 $z$대신 $y$를, $x$대신 $z$를 대입해 보면 0이 되므로 교대식 $f(x,\ y,\ z)$은 $(x-y)(y-z)(z-x)$을 인수로 갖는다.

(3) 교대식과 대칭식의 연산

① (교대식)±(교대식)=(교대식)　② (교대식)×(교대식)=(대칭식)　③ (교대식)×(대칭식)=(교대식)

⇨ 예를 들어 $f(x,\ y)=x-y$, $g(x,\ y)=3xy(x-y)$, $h(x,\ y)=x^2+y^2$라 두면 $f(x,\ y)$, $g(x,\ y)$는 교대식이고 $h(x,\ y)$는 대칭식이다.

① $A(x,\ y)=f(x,\ y)+g(x,\ y)=(3xy+1)(x-y)$이면 $A(y,\ x)=-(3xy+1)(x-y)=-A(x,\ y)$이므로
**(교대식)±(교대식)=(교대식)** 임을 알 수 있다.

② $B(x,\ y)=f(x,\ y)\times g(x,\ y)=3xy(x-y)^2$이면 $B(y,\ x)=3yx(y-x)^2=B(x,\ y)$이므로
**(교대식)×(교대식)=(대칭식)** 임을 알 수 있다.

③ $C(x,\ y)=f(x,\ y)\times h(x,\ y)=(x-y)(x^2+y^2)$이면 $C(y,\ x)=-(x-y)(y^2+x^2)=-C(x,\ y)$이고
$D(x,\ y)=g(x,\ y)\times h(x,\ y)=3xy(x-y)(x^2+y^2)$이면　$D(y,\ x)=-3yx(x-y)(y^2+x^2)=-D(x,\ y)$이므로
**(교대식)×(대칭식)=(교대식)** 임을 알 수 있다.

(4) **(교대식)=(교대식)×(대칭식)**으로 보고 교대식의 인수분해를 정리해 보자.

① 문자가 3개인 3차 교대식$=k(x-y)(y-z)(z-x)$

② 문자가 3개인 4차 교대식$=k(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$

③ 문자가 3개인 5차 교대식$=(x-y)(y-z)(z-x)\{A(x+y+z)^2+B(xy+yz+zx)\}$

④ 문자가 3개인 6차 교대식$=(x-y)(y-z)(z-x)\{A(x+y+z)^3+B(x+y+z)(xy+yz+zx)+Cxyz\}$

예) $x^2y^2(x-y)+y^2z^2(y-z)+z^2x^2(z-x)$은 문자가 3개인 5차 교대식이므로
$x^2y^2(x-y)+y^2z^2(y-z)+z^2x^2(z-x)=(x-y)(y-z)(z-x)\{A(x+y+z)^2+B(xy+yz+zx)\}$에서
$x=1,\ y=-1,\ z=0$대입하면 $2=2(-B)$, $x=1,\ y=2,\ z=0$대입하면 $-4=2(9A+2B)$에서
$A=0,\ B=-1$　$\therefore\ x^2y^2(x-y)+y^2z^2(y-z)+z^2x^2(z-x)=-(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

## 세미나(13)-교대식을 이용한 인수분해

### 문자가 3개인 교대식의 인수분해

(1) 3차 교대식 $= k(x-y)(y-z)(z-x)$

(2) 4차 교대식 $= k(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$

(3) 5차 교대식 $= (x-y)(y-z)(z-x)\{A(x+y+z)^2 + B(xy+yz+zx)\}$

(1) ① $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$을 인수분해 하여라.

**풀이** $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$은 문자가 3개인 3차 교대식이므로

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=k(a-b)(b-c)(c-a)$에서 $a=1,\ b=-1,\ c=0$을 대입하면

$6=2k$에서 $k=3$ $\therefore (a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$

② $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 을 인수분해 하여라.

**풀이** $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 은 문자가 3개인 3차 교대식이므로

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=k(a-b)(b-c)(c-a)$에서 $a=1,\ b=-1,\ c=0$을 대입하면

$-2=2k$에서 $k=-1$ $\therefore a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$

③ $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$을 인수분해 하여라.

**풀이** $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$은 문자가 3개인 3차 교대식이므로

$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=k(a-b)(b-c)(c-a)$에서 $a=1,\ b=-1,\ c=0$을 대입하면

$2=2k$에서 $k=1$ $\therefore a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=(a-b)(b-c)(c-a)$

(2) ① $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$을 인수분해 하여라.

**풀이** $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$은 문자가 3개인 4차 교대식이므로

$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$에서 $a=1,\ b=-2,\ c=0$을 대입하면

$6=-6k$에서 $k=-1$ $\therefore a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

② $x(y^3-z^3)+y(z^3-x^3)+z(x^3-y^3)$을 인수분해 하여라.

**풀이** $x(y^3-z^3)+y(z^3-x^3)+z(x^3-y^3)$은 문자가 3개인 4차 교대식이므로

$x(y^3-z^3)+y(z^3-x^3)+z(x^3-y^3)=k(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$에서 $x=1,\ y=-2,\ z=0$을 대입하면 $-6=-6k$에서 $k=1$ $\therefore x(y^3-z^3)+y(z^3-x^3)+z(x^3-y^3)=(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$

(3) $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$을 인수분해 하여라.

**풀이** $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$은 문자가 3개인 5차 교대식이므로

$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5=(x-y)(y-z)(z-x)\{A(x+y+z)^2+B(xy+yz+zx)\}$에서

$x=1,\ y=-1,\ z=0$대입하면 $30=B(-2)$, $x=1,\ y=2,\ z=0$대입하면 $30=2(9A+2B)$에서

$A=5,\ B=-15$

$$\begin{aligned}(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5&=(x-y)(y-z)(z-x)\{5(x+y+z)^2-15(xy+yz+zx)\}\\&=5(x-y)(y-z)(z-x)\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\}\\&=5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\end{aligned}$$

# 상수 탐구

31) **심화유형 1-1**

3이하의 자연수 $n$에 대하여 $A_n$을 다음과 같이 정의한다.

(가) $A_1 = 9+99+999$
(나) $A_n =$(세 수 $9$, $99$, $999$에서 서로 다른 $n(n \geq 2)$개를 택하여 곱한 수의 총합)

이때, $A_1 + A_2 + A_3 - 3$의 값을 $100$으로 나눈 나머지를 구하시오.

32)

3이하의 자연수 $n$에 대하여 $A_n$을 다음과 같이 정의한다.

(가) $A_1 = 5+55+555$
(나) $A_n =$(세 수 $5$, $55$, $555$에서 서로 다른 $n(n \geq 2)$개를 택하여 곱한 수의 총합)

이때, $\dfrac{A_1 A_2 - A_3}{1000}$의 값의 일의 자리 수를 구하시오.

33)

4이하의 자연수 $n$에 대하여 $A_n$을 다음과 같이 정의한다.

(가) $A_1 = 3+55+777+9999$
(나) $A_n =$(네 수 $3$, $55$, $777$, $9999$에서 서로 다른 $n(n \geq 2)$개를 택하여 곱한 수의 총합)

이때, $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$의 값을 $10000$으로 나눈 나머지의 일의 자리 수를 구하시오.