제 2 교시

2024학년도 11월 고3 학력평가 문제지

수학 영역

성명		수험번호						3				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

오늘은 네가 꽃이다

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

대구미래교육연구원

수학 영역

5지 선다형

1. $\sqrt[4]{48} \times 9^{-\frac{1}{8}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $f(x)=4x^3+3x^2-x-6$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

3. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 인 θ 에 대하여 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$ 일 때, $\sin(\pi+\theta)$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $-\frac{\sqrt{2}}{9}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

4. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x-1 & (x<-1) \\ x & (x\ge -1)\end{cases},\quad g(x)=x^2-a$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=6x(x-1),\quad f(0)=4$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1+a_2=-1,\quad a_3=4$$

일 때, a_5의 값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

7. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$가 $x=-1$에서 극대이고, $x=5$에서 극소일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

8. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt = f(x) + x^3 + kx - 2$$

를 만족시키고 $f(-1) = -3$ 일 때, $f(k)$ 의 값은? (단, k 는 상수이다.) [3점]

① 66 ② 68 ③ 70 ④ 72 ⑤ 74

9. $0 \le x \le 2$ 인 실수 x 에 대하여 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{P}(2^x + 2, 1)$, $\mathrm{Q}(0, 2^{x-3} - 1)$ 이 있다. 삼각형 POQ 의 넓이를 $S(x)$ 라 할 때, $S(x)$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하자. $M + m$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.) [4점]

① $\frac{19}{8}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{21}{8}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ $\frac{23}{8}$

10. 두 점 P 와 Q 는 시각 $t = 0$ 일 때 각각 점 A(1) 과 점 B(8) 에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 자연수 a, b 에 대하여 두 점 P, Q 의 시각 $t\ (t \ge 0)$ 에서의 속도는 각각

$$v_1(t) = t^2 + at + 1, \quad v_2(t) = 4t^2 - 4t + b$$

이다. 시각 $t = 3$ 에서 두 점 P, Q 의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리가 7 일 때, $a + b$ 의 값은? [4점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

11. 모든 항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_{12}a_{14}=(a_{13})^2-9,\ \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{2}{35}$$

를 만족시킬 때, a_4 의 값은? [4점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

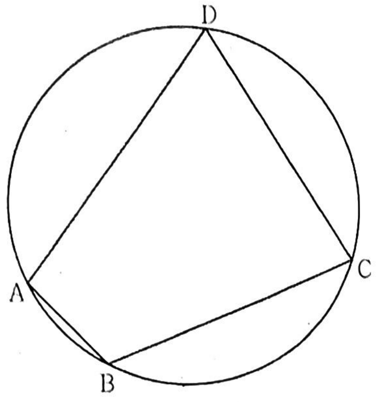
12. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+3x+17$ 과 실수 t 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ 2f(t)-f(x) & (x \geq t) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $|g(x)|$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수가 2 가 되도록 하는 모든 t 의 값의 합은? [4점]

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

13. 그림과 같이 사각형 ABCD 가 반지름의 길이가 $\sqrt{21}$ 인 원에 내접하고 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}=7$ 이다. $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{30}$ 일 때, $\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}$ 의 값은? [4점]



① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

14. 함수 $f(x)=x(x-3)^2$ 과 실수 t 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$ 에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$ 라 하자. x 에 대한 방정식 $f(x)=g(x)$ 를 만족시키는 세 실근 $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha\le\beta\le\gamma)$ 에 대하여 함수 $h(t)$ 를

$$h(t)=\frac{f(\alpha)+f(\gamma)-|f(\alpha)-f(\gamma)|}{2}$$

라 할 때, $\int_0^3 h(t)\,dt$ 의 값은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{19}{4}$ ③ 5 ④ $\frac{21}{4}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

15. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} -a_n+4n & (a_n<2n) \\ a_n-5n & (a_n \geq 2n) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_5=9$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 117 ② 121 ③ 125 ④ 129 ⑤ 133

단답형

16. 방정식 $\log_2(2x+1)=1+\log_4\left(x^2+\frac{9}{4}\right)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(3x-3)f(x)$$

라 하자. $f(0)=4$, $f'(0)=1$일 때, $g'(0)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{5} a_n = 10, \quad \sum_{n=1}^{5}(a_n + b_n) = 30$$

일 때, $\sum_{n=1}^{5}(5a_n + 2b_n + c) = 150$을 만족시키는 상수 c의 값을 구하시오. [3점]

19. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$$2x^2 - 2\left\{\cos\left(\frac{a}{12}\pi\right)\right\}x - 1 + 2\sin\left(\frac{a}{12}\pi\right) - \sin^2\left(\frac{a}{12}\pi\right) \geq 0$$

을 만족시키는 24 이하의 양수 a의 값을 구하시오. [3점]

20. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = |x^3 - 9x^2 + 24x - 20 + a|$$

라 하자. 세 점 A, B, C는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 두 점 A, B에서의 접선의 기울기가 각각 0이다.
(나) 점 C$(3, -f(3))$에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 4이다.

$f(2)$의 최댓값을 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]

21. 두 실수 m, n $(n > 4)$에 대하여 두 함수

$$f(x) = \log_2(x-m), \quad g(x) = -2^x + n$$

이 있다. $x > m$ 에서 정의된 함수 $h(x)$를

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq g(x)) \\ g(x) & (f(x) < g(x)) \end{cases}$$

라 하자. x에 대한 방정식 $h(x) = t$를 만족시키는 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 범위가 $2 < t < n-2$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. [4점]

22. 두 정수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$가 있다. 방정식 $f'(x) = 0$의 모든 실근은 6 이하의 자연수이고 $f'\left(\frac{9}{4}\right) < 0$이다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $n = 1, 2, 3$에 대하여
> $2n-2 \leq x \leq 2n-1$일 때, $g(x) = f(x)$이고
> $2n-1 < x < 2n$일 때, $g(x) = -f(x)$이다.
> (나) $x < 0$ 또는 $x \geq 6$일 때, $g(x) = |f(x)|$이다.
> (다) 함수 $g(x)$가 $x = k$에서 불연속인 k의 값의 개수가 6이다.

$f(1)$의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(미적분)

5지 선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+4x)}{e^{2x}-1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

24. 두 실수 a, b에 대하여 곡선 $x^3+x-\tan y=1$ 위의 점 $\left(a, \frac{\pi}{4}\right)$에서의 접선의 기울기가 b일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

25. 구간 $[0, \infty)$ 에서 정의된 함수 $f(x)=\ln(x^2+1)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t\ (t \geq 0)$ 에서의 위치 (x, y) 가 $x=e^t$, $y=g(t)$ 일 때, 시각 $t=\ln 2$ 에서 점 P 의 속력은? [3점]

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$　② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\sqrt{5}$

26. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n\ln(k+n)-n\ln n+n}{k^2+2kn+n^2}$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{\ln 2}{2}+1$　② $-\frac{\ln 2}{4}+1$　③ 1　④ $\frac{\ln 2}{4}+1$　⑤ $\frac{\ln 2}{2}+1$

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-xf'(x)$$

를 만족시킨다. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x^2f(x)}{x^2+1}dx$의 값은? [3점]

① $4-\ln 2-2\sqrt{2}$ ② $4-\ln 2-\sqrt{2}$ ③ $4-\ln 2$ ④ $4-\ln 2+\sqrt{2}$ ⑤ $4-\ln 2+2\sqrt{2}$

28. 공비가 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1=b_1=1$이고, 수열 $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$의 모든 항이 정수이다.
>
> (나) 두 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 각각 수렴하고,
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}a_n}{\sum_{n=1}^{\infty}b_n}$$ 이다.

수열 $\{a_n\}$의 공비가 최소일 때, 모든 $\dfrac{b_4}{a_4}$의 값의 합은? [4점]

① 54 ② 56 ③ 58 ④ 60 ⑤ 62

단답형

29. 구간 $[0, \infty)$ 에서 정의된 함수 $f(x) = 2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\cos\frac{x}{2}$ 가 있다. 양수 a 에 대하여 직선 $y = -x + a$ 와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표를 α 라 하자. $0 < t \le \alpha$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$$\int_{\alpha-t}^{\alpha+t} \{f(x) + x - a\}\, dx = 0$$

이 되도록 하는 모든 양수 α 를 작은 수부터 크기 순으로 나열할 때, n 번째 수를 α_n 이라 하자. $\frac{16}{\pi} \times (\alpha_4 - \alpha_2)$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 정의된 함수 $g(x) = e^{f(x)}\cos^2(\pi x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 < k < 2$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가 $x = k$ 에서 극대 또는 극소인 실수 k 의 개수는 3 이다.
> (나) 임의의 양수 h 에 대하여 $g'(1-c) \times g'(1+c) < 0$ 을 만족시키는 실수 c 가 열린구간 $(0, h)$ 에 존재한다.
> (다) 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{e^2}$ 은 서로 다른 세 점에서 만난다.

$f(0) = 0$ 일 때, $g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}e^{-\frac{q}{p}}$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

※ 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

• 2교시 수학 영역 •

1	②	**2**	②	**3**	①	**4**	①	**5**	③
6	④	**7**	⑤	**8**	④	**9**	⑤	**10**	③
11	②	**12**	④	**13**	④	**14**	①	**15**	③
16	2	**17**	9	**18**	12	**19**	6	**20**	4
21	35	**22**	16						

1. [출제 의도] 지수 계산하기

$\sqrt[4]{48}\times 9^{-\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[8]{3^2}}=\sqrt[4]{\frac{48}{3}}=\sqrt[4]{2^4}=2$

2. [출제 의도] 미분계수 계산하기

$f(1)=0$ 이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$

$f'(x)=12x^2+6x-1$ 에서

$f'(1)=17$

3. [출제 의도] 삼각함수 이해하기

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ \sin(\pi+\theta)=-\sin\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

4. [출제 의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to -1-}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$

$\lim_{x\to -1+}f(x)g(x)=(-1)\times(1-a)=a-1$

$\lim_{x\to -1-}f(x)g(x)=0\times(1-a)=0$

$f(-1)g(-1)=(-1)\times(1-a)=a-1$ 이고 $a-1=0$

$\therefore\ a=1$

5. [출제 의도] 부정적분 이해하기

$f'(x)=6x(x-1)=6x^2-6x$ 이므로

$f(x)=2x^3-3x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=4$ 에서 $C=4$, $f(x)=2x^3-3x^2+4$

$\therefore\ f(1)=3$

6. [출제 의도] 등비수열 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_1+a_2=a+ar=-1$ 에서 $r\neq -1$ 이므로

$a=-\frac{1}{1+r}$ …… ㉠

$a_3=ar^2=4$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면

$-\frac{r^2}{1+r}=4$

$(r+2)^2=0$ 이므로 $r=-2$이고 $a=-\frac{1}{1+(-2)}=1$

$\therefore\ a_5=1\times(-2)^4=16$

7. [출제 의도] 함수의 극대, 극소 이해하기

$f(x)=x^3+ax^2+bx+5$ 에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$는 $x=-1$ 에서 극대이고

$x=5$ 에서 극소이므로 $f'(-1)=f'(5)=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

(두 근의 합) $=-\frac{2a}{3}=4$ 이므로 $a=-6$

(두 근의 곱) $=\frac{b}{3}=-5$ 이므로 $b=-15$

$\therefore\ a-b=9$

8. [출제 의도] 정적분의 활용 이해하기

$\int_{-1}^{x}f(t)dt=f(x)+x^3+kx-2$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=f(-1)-1-k-2$, $f(-1)=k+3=-3$ 이므로

$k=-6$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f'(x)+3x^2+k=f'(x)+3x^2-6$ …… ㉡

다항함수 $f(x)$가 상수함수이면 ㉡의 좌변은 상수, 우변은 이차식이 되어 조건을 만족시킬 수 없다.

다항함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n (a는 0이 아닌 상수, n은 자연수)이라 하면 $f'(x)$의 최고차항은 nax^{n-1}이므로 이 등식이 성립하려면 $ax^n=3x^2$

즉, $a=3$, $n=2$

$f(x)=3x^2+px+q$ (p, q는 상수)로 놓을 수 있다.

이때 $f'(x)=6x+p$이므로 ㉡에서

$3x^2+px+q=(6x+p)+3x^2-6$

$p=6$, $q=0$

$f(x)=3x^2+6x$

따라서 $f(k)=f(-6)=108-36=72$

9. [출제 의도] 지수함수를 이용하여 추론하기

$S(x)=\frac{1}{2}\times(2^x+2)\times|2^{x-3}-1|$ 이고

$0\le x\le 2$에 대하여

$2^{-3}-1\le 2^{x-3}-1\le 2^{-1}-1$ 이므로

$2^{x-3}-1<0$ 이다.

그러므로 $S(x)=\frac{1}{2}\times(2^x+2)\times(1-2^{x-3})$

$2^x=t\ (1\le t\le 4)$ 라 하면

$S(x)=\frac{1}{2}(t+2)\left(1-\frac{1}{8}t\right)$

$=-\frac{1}{16}(t-3)^2+\frac{25}{16}$

이므로 $S(x)$는

$t=3$일 때, 최댓값 $M=\frac{25}{16}$

$t=1$일 때, 최솟값 $m=\frac{21}{16}$을 갖는다.

따라서 $M+m=\frac{23}{8}$

10. [출제 의도] 점의 위치, 속도를 활용하여 문제해결하기

시각 $t=3$에서 두 점 P, Q의 속도가 서로 같으므로

$v_1(3)=v_2(3)$ 에서 $9+3a+1=36-12+b$

$3a=b+14$ …… ㉠

시각 t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$x_1(t)=1+\int_0^t(t^2+at+1)\,dt=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}at^2+t+1$

$x_2(t)=8+\int_0^t(4t^2-4t+b)\,dt=\frac{4}{3}t^3-2t^2+bt+8$

시각 $t=3$에서 두 점 P, Q 사이의 거리가 7이므로

$|x_2(3)-x_1(3)|=7$, $\left|-\frac{9}{2}a+3b+13\right|=7$

(i) $-\frac{9}{2}a+3b+13=7$일 때

㉠에 의해 $a=8$, $b=10$

(ii) $-\frac{9}{2}a+3b+13=-7$일 때

㉠에 의해 $a=\frac{44}{9}$, $b=\frac{2}{3}$

이므로 a, b가 자연수임을 만족하지 않는다.

따라서 $a+b=8+10=18$

11. [출제 의도] 수열의 합을 이용하여 문제해결하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$(a_{13}-d)(a_{13}+d)=(a_{13})^2-9$ 에서 $d^2=9$이고

모든 항이 양수이므로 $d=3$

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=3$ 이므로

$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{10}}-\frac{1}{a_{11}}\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{11}}\right)$

$a_{11}=a_1+(11-1)\times 3=a_1+30$ 이므로

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{11}}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+30}\right)=\frac{10}{a_1(a_1+30)}=\frac{2}{35}$

$2a_1(a_1+30)=350$

${a_1}^2+30a_1-175=(a_1-5)(a_1+35)=0$

$a_1=5$ 또는 $a_1=-35$

등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $a_1=5$

따라서 $a_4=5+(4-1)\times 3=14$

12. [출제 의도] 미분가능성을 이용하여 문제해결하기

$x<t$이면 곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$와 같고,

$x\ge t$이면 곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$를 직선 $y=f(t)$에 대하여 대칭이동시킨 것과 같다.

함수 $|g(x)|$는

$f'(t)\neq 0$이면 $x=t$에서 미분가능하지 않고,

t가 아닌 실수 m에 대하여 $g(m)=0$이고

$f'(m)\neq 0$일 때 $x=m$에서 미분가능하지 않다.

함수 $|g(x)|$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수를 $h(t)$라 하자.

$f(x)=x^3+3x^2+3x+17$ 에서

$f'(x)=3x^2+6x+3\ge 0$

(i) $t=-1$일 때

$f(-1)=16$, $f'(-1)=0$ 이므로

방정식 $g(x)=0$을 만족시키는

두 실수 α_1, α_2에 대하여

$f'(\alpha_1)\neq 0$, $f'(\alpha_2)\neq 0$ 이므로 $h(-1)=2$

(ii) $t=a\ (a\neq -1)$일 때

$h(a)=2$를 만족시키기 위해서는 $g(\beta)=0$이고 $f'(\beta)=0$인 실수 β가 존재해야 한다.

즉, $\beta=-1$이어야 한다.

$f(a)=\frac{1}{2}f(-1)=8$이므로

$a^3+3a^2+3a+17=8$, $(a+1)^3+16=8$에서 이를 만족시키는 실수 a의 값은 -3

따라서 (i), (ii)에 의해 조건을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은 $-1+(-3)=-4$

13. [출제 의도] 사인법칙, 코사인법칙 추론하기

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의해

$\overline{BD}^2=2^2\times(\sqrt{21})^2\times\sin^2 C=84(1-\cos^2 C)$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의해

$\overline{BD}^2=7^2+7^2-2\times7^2\times\cos C=98(1-\cos C)$

두 식을 연립하면

$1+\cos C=\frac{98}{84}=\frac{7}{6}$, $\cos C=\frac{1}{6}$

$\overline{BD}^2=98\times\left(1-\frac{1}{6}\right)=98\times\frac{5}{6}=\frac{245}{3}$

$\overline{AB}=x$, $\overline{AD}=y$라 하자.

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의해

$\overline{BD}^2=x^2+y^2-2xy\cos(\pi-C)$

$=x^2+y^2+2xy\cos C$

$=(x+y)^2-2xy+2xy\cos C$

$=(2\sqrt{30})^2-2xy+\frac{xy}{3}$

$\frac{245}{3}=120-\frac{5}{3}xy$에서 $245=360-5xy$

$5xy=115$, $xy=23$

$\therefore\ \overline{AB}\times\overline{AD}=23$

14. [출제 의도] 함수의 그래프의 개형을 추론하기

$f(x)=x(x-3)^2$에서 $f'(x)=3(x-1)(x-3)$이므로 $x=1$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

한편, $g(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$이고

x에 대한 방정식 $f(x)=g(x)$에서

$f(x)-f(t)=f'(t)(x-t)$

$\{x(x-3)^2-t(t-3)^2\}=3(t^2-4t+3)(x-t)$

$x=t$ 또는 $x=-2t+6$

$t=2$일 때, $\alpha=\beta=\gamma=2$

$t\neq2$일 때, $x=t$ 또는 $x=-2t+6$

$f(\alpha)\le f(\gamma)$이면 $h(t)=f(\alpha)$이고,

$f(\alpha)>f(\gamma)$이면 $h(t)=f(\gamma)$이다.

(i) $t<1$일 때

$\alpha=t$, $\gamma=-2t+6$이고 $f(\alpha)\le f(\gamma)$이므로

$h(t)=f(\alpha)=f(t)=t(t-3)^2$

(ii) $1\le t<2$일 때

$\alpha=t$, $\gamma=-2t+6$이고 $f(\alpha)>f(\gamma)$이므로

$h(t)=f(\gamma)=f(-2t+6)=-2(t-3)(2t-3)^2$

(iii) $t=2$일 때

$\alpha=\beta=\gamma=2$이고 $h(t)=f(2)=2$

(iv) $2<t<3$일 때

$\alpha=-2t+6$, $\gamma=t$이고 $f(\alpha)>f(\gamma)$이므로

$h(t)=f(\gamma)=f(t)=t(t-3)^2$

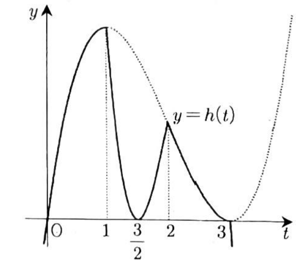
(v) $t\ge3$일 때

$\alpha=-2t+6$, $\gamma=t$이고 $f(\alpha)\le f(\gamma)$이므로

$h(t)=f(\alpha)=f(-2t+6)=-2(t-3)(2t-3)^2$

(i) ~ (v)에 의해 함수 $h(t)$는

$$h(t)=\begin{cases} t(t-3)^2 & (t<1) \\ -2(t-3)(2t-3)^2 & (1\le t<2) \\ t(t-3)^2 & (2\le t<3) \\ -2(t-3)(2t-3)^2 & (t\ge3) \end{cases}$$



따라서

$\int_0^3 h(t)\,dt$

$=\int_0^1 t(t-3)^2dt+\int_1^2\{-2(t-3)(2t-3)^2\}dt+\int_2^3 t(t-3)^2dt$

$=\frac{11}{4}+1+\frac{3}{4}=\frac{9}{2}$

15. [출제 의도] 귀납적으로 정의된 수열 추론하기

$a_{k+1}\ge4k$일 때, $a_k<2k$이면

$a_{k+1}=-a_k+4k<4k$가 되어 모순이다.

$a_{k+1}\ge4k$이면 $a_k\ge2k$이고 $a_{k+1}=a_k-5k$

그러므로 $a_k\ge9k$이다.

(i) $a_4<8$, $a_3<6$, $a_2<4$, $a_1<2$일 때

$9=16-a_4$이므로 $a_4=7$

$7=12-a_3$이므로 $a_3=5$

$5=8-a_2$이므로 $a_2=3$

$3=4-a_1$이므로 $a_1=1$

(ii) $a_4<8$, $a_3<6$, $a_2<4$, $a_1\ge2$일 때

$9=16-a_4$이므로 $a_4=7$

$7=12-a_3$이므로 $a_3=5$

$5=8-a_2$이므로 $a_2=3$

$3=a_1-5$이므로 $a_1=8$

(iii) $a_4<8$, $a_3<6$, $a_2\ge4$일 때

$9=16-a_4$이므로 $a_4=7$

$7=12-a_3$이므로 $a_3=5$

$5=a_2-10$이므로 $a_2=15$

$a_2=15\ge4$이므로 $a_1\ge9$이다.

$15=a_1-5$이므로 $a_1=20$

(iv) $a_4<8$, $a_3\ge6$일 때

$9=16-a_4$이므로 $a_4=7$

$7=a_3-15$이므로 $a_3=22>8$이므로

$a_2\ge18$, $a_1\ge9$이다.

$22=a_2-10$이므로 $a_2=32$

$32=a_1-5$이므로 $a_1=37$

(v) $a_4\ge8$일 때

$9=a_4-20$이므로 $a_4=29>12$이므로

$a_3\ge27$, $a_2\ge18$, $a_1\ge9$이다.

$29=a_3-15$이므로 $a_3=44$

$44=a_2-10$이므로 $a_2=54$

$54=a_1-5$이므로 $a_1=59$

(i) ~ (v)에 의해 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값은 1, 8, 20, 37, 59

따라서 모든 a_1의 값의 합은 125

16. [출제 의도] 로그방정식 이해하기

진수 조건에 의해 $x>-\frac{1}{2}$

$\log_2(2x+1)=1+\frac{1}{2}\log_2\left(x^2+\frac{9}{4}\right)$

$\log_2(2x+1)^2=2+\log_2\left(x^2+\frac{9}{4}\right)$

$(2x+1)^2=4x^2+9$

$\therefore\ x=2$

17. [출제 의도] 미분계수 이해하기

$g(x)=(3x-3)f(x)$에서

$g'(x)=3f(x)+(3x-3)f'(x)$

$\therefore\ g'(0)=3f(0)-3f'(0)=9$

18. [출제 의도] 수열의 합 이해하기

$\sum_{n=1}^{5}(5a_n+2b_n+c)$

$=3\times\sum_{n=1}^{5}a_n+2\times\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)+5c=150$

$5c=60$

$\therefore\ c=12$

19. [출제 의도] 삼각함수 이해하기

모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$2x^2-2\left\{\cos\left(\frac{a}{12}\pi\right)\right\}x-1+2\sin\left(\frac{a}{12}\pi\right)-\sin^2\left(\frac{a}{12}\pi\right)\ge0$

이 성립하므로 x에 대한 이차방정식

$2x^2-2\left\{\cos\left(\frac{a}{12}\pi\right)\right\}x-1+2\sin\left(\frac{a}{12}\pi\right)-\sin^2\left(\frac{a}{12}\pi\right)=0$

의 판별식을 D라 하면 $D\le0$

$\frac{D}{4}=\cos^2\left(\frac{a}{12}\pi\right)+2-4\sin\left(\frac{a}{12}\pi\right)+2\sin^2\left(\frac{a}{12}\pi\right)\le0$

$\cos^2\left(\frac{a}{12}\pi\right)=1-\sin^2\left(\frac{a}{12}\pi\right)$이므로

$\sin^2\left(\frac{a}{12}\pi\right)-4\sin\left(\frac{a}{12}\pi\right)+3\le0$

$\left\{\sin\left(\frac{a}{12}\pi\right)-1\right\}\left\{\sin\left(\frac{a}{12}\pi\right)-3\right\}\le0$

$1\le\sin\left(\frac{a}{12}\pi\right)\le3$

$-1\le\sin\left(\frac{a}{12}\pi\right)\le1$이므로 $\sin\left(\frac{a}{12}\pi\right)=1$

따라서 조건을 만족시키는 24 이하의 양수 a의 값은 6

20. [출제 의도] 삼차함수 그래프 문제해결하기

$g(x)=x^3-9x^2+24x-20+a$라 하자.

함수 $y=|g(x)|$의 그래프에서 접선의 기울기가 0인 두 접점은 삼차함수 $g(x)$의 그래프에서 접선의 기울기가 0인 접점과 x좌표가 같다.

삼차함수 $g(x)$는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$g'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4)$이고

방정식 $g'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=4$
점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작으므로
두 점 A, B는 각각 $A(2, |a|)$, $B(4, |a-4|)$이다.

(i) $a \le 0$인 경우
$A(2, -a)$, $B(4, -a+4)$이고,
두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은
$2x-y-a-4=0$
이때, $-f(3)=-|a-2|=a-2$이므로
세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있지 않다.
점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 길이를
h라 하면

$$h=\frac{|2\times3+(-1)\times(a-2)-a-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{|-2a+4|}{\sqrt{5}}=\frac{-2a+4}{\sqrt{5}}$$

선분 AB의 길이는 $\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$
삼각형 ABC의 넓이는 4이므로

$$\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{-2a+4}{\sqrt{5}}=-2a+4=4,\ a=0$$

그러므로 $f(2)=|a|=0$

(ii) $0<a<4$인 경우
$A(2, a)$, $B(4, -a+4)$이고,
두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은
$(a-2)x+y-3a+4=0$
이때, $-f(3)=-|a-2|$이므로
세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있지 않다.
점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 길이를
h라 하면

$$h=\frac{|(a-2)\times3+1\times(-|a-2|)-3a+4|}{\sqrt{(a-2)^2+1^2}}$$

$$=\frac{|-|a-2|-2|}{\sqrt{(a-2)^2+1}}=\frac{|a-2|+2}{\sqrt{(a-2)^2+1}}$$

선분 AB의 길이는
$\sqrt{(-2)^2+(2a-4)^2}=2\sqrt{(a-2)^2+1}$
삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times2\sqrt{(a-2)^2+1}\times\frac{|a-2|+2}{\sqrt{(a-2)^2+1}}$$

$=|a-2|+2<4$
이므로 삼각형 ABC의 넓이가 4에 모순이다.

(iii) $a \ge 4$인 경우
$A(2, a)$, $B(4, a-4)$이고,
두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은
$2x+y-a-4=0$
이때, $-f(3)=-|a-2|=-a+2$이므로
세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있지 않다.
점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 길이를
h라 하면

$$h=\frac{|2\times3+1\times(-a+2)-a-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{|-2a+4|}{\sqrt{5}}=\frac{2a-4}{\sqrt{5}}$$

선분 AB의 길이는 $\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$
삼각형 ABC의 넓이는 4이므로

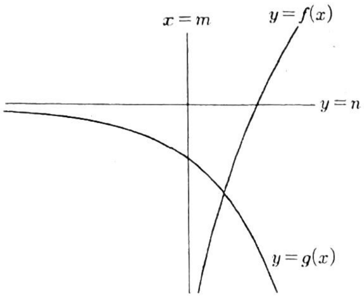
$$\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{2a-4}{\sqrt{5}}=2a-4=4,\ a=4$$

그러므로 $f(2)=|a|=4$

따라서 (i) ~ (iii)에 의해 $f(2)$의 최댓값은 4

21. [출제 의도] 지수함수와 로그함수 그래프 문제해결하기

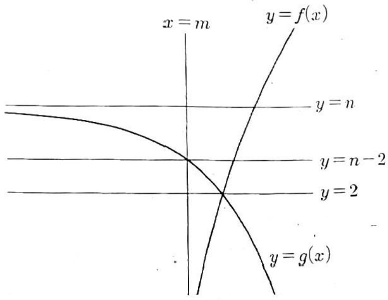
함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표를 a라 하면 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases}\log_2(x-m) & (x\ge a)\\ -2^x+n & (m<x<a)\end{cases}$$

x에 대한 방정식 $h(x)=t$를 만족시키는
서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는
모든 실수 t의 값의 범위가 $2<t<n-2$이므로
$f(a)=g(a)=2$, $g(m)=n-2$



$g(m)=-2^m+n=n-2$이므로 $m=1$
$f(a)=\log_2(a-1)=2$이므로 $a-1=2^2$, $a=5$
$g(5)=-2^5+n=2$이므로 $n=34$
따라서 $m+n=1+34=35$

22. [출제 의도] 함수의 그래프의 개형 추론하기

함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고,
방정식 $f'(x)=0$의 모든 실근이
6 이하의 자연수이므로,
6 이하의 두 자연수 α, β $(\alpha\le\beta)$에 대하여
$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$

$\alpha=\beta$이면 $f'\left(\frac{9}{4}\right)=3\left(\frac{9}{4}-\alpha\right)^2>0$이므로 모순이다.

그러므로 $\alpha<\beta$

$f(0)=0$이므로 $f(x)=x^3-\frac{3(\alpha+\beta)}{2}x^2+3\alpha\beta x$이고,

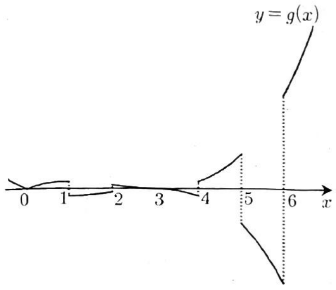
$-\frac{3(\alpha+\beta)}{2}$는 정수이다.

즉, $\alpha+\beta$가 짝수이어야 하므로
α와 β 모두 홀수이거나 모두 짝수이다.
함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고

$f'\left(\frac{9}{4}\right)<0$이므로 $\alpha=1$ 또는 $\alpha=2$이다.

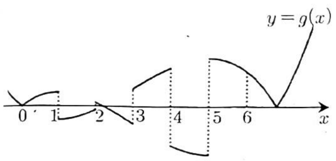
즉, $\alpha=1$, $\beta=3$ 또는 $\alpha=1$, $\beta=5$ 또는
$\alpha=2$, $\beta=4$ 또는 $\alpha=2$, $\beta=6$이다.
조건 (가)에 의해 닫힌구간 $[0, 1]$, $[2, 3]$, $[4, 5]$에서 $g(x)=f(x)$이고,
열린구간 $(1, 2)$, $(3, 4)$, $(5, 6)$에서
$g(x)=-f(x)$이다.
조건 (가), (나)에 의해 함수 $y=g(x)$의 그래프는
다음과 같다.

(i) $\alpha=1$, $\beta=3$인 경우
$f(x)=x^3-6x^2+9x$이고
$x=3$에서 곡선 $y=f(x)$는 x축과 접하므로
함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



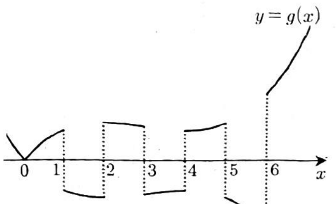
함수 $g(x)$는 $x=1, 2, 4, 5, 6$에서
불연속이므로 조건 (다)가 성립하지 않는다.

(ii) $\alpha=1$, $\beta=5$인 경우
$f(x)=x^3-9x^2+15x$이므로
함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



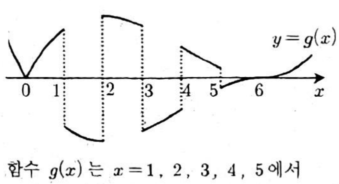
함수 $g(x)$는 $x=1, 2, 3, 4, 5$에서
불연속이므로 조건 (다)가 성립하지 않는다.

(iii) $\alpha=2$, $\beta=4$인 경우
$f(x)=x^3-9x^2+24x$이므로
함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $g(x)$는 $x=1, 2, 3, 4, 5, 6$에서
불연속이므로 조건 (다)가 성립한다.

(iv) $\alpha=2$, $\beta=6$인 경우
$f(x)=x^3-12x^2+36x$이고
$x=6$에서 곡선 $y=f(x)$는 x축과 접하므로
함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $g(x)$는 $x=1, 2, 3, 4, 5$에서
불연속이므로 조건 (다)가 성립하지 않는다.

(i) ~ (iv)에 의해 $f(x)=x^3-9x^2+24x$
따라서 $f(1)=16$

[확률과 통계]

23	③	**24**	②	**25**	④	**26**	①	**27**	⑤
28	④	**29**	261	**30**	774				

[미적분]

23	④	24	③	25	⑤	26	①	27	①
28	②	29	64	30	53				

23. [출제 의도] 지수함수와 로그함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{4x\times\frac{\ln(1+4x)}{4x}}{2x\times\frac{e^{2x}-1}{2x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4x}{2x}\times\frac{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}}{\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}}$$

$$=\frac{4}{2}\times\frac{1}{1}=2$$

24. [출제 의도] 음함수의 미분법 이해하기

점 $\left(a,\ \frac{\pi}{4}\right)$는 곡선 $x^3+x-\tan y=1$ 위의 점이므로

$a^3+a-\tan\frac{\pi}{4}=1$

$a^3+a-2=0$, $(a-1)(a^2+a+2)=0$, $a=1$

$x^3+x-\tan y=1$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+1-\sec^2 y\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+1}{\sec^2 y}$ (단, $\sec^2 y\neq0$)

이므로 $b=\frac{3\times1^2+1}{\sec^2\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{2}=2$

따라서 $a+b=3$

25. [출제 의도] 역함수의 미분법 이해하기

$f(x)=\ln(x^2+1)$에서 $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

구간 $(0,\infty)$의 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 구간 $[0,\infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

$x=e^t$에서 $\frac{dx}{dt}=e^t$이므로

$t=\ln2$일 때, $\frac{dx}{dt}=2$

$y=g(t)$에서 $\frac{dy}{dt}=g'(t)$이므로

$t=\ln2$일 때, $\frac{dy}{dt}=g'(\ln2)=\frac{1}{f'(g(\ln2))}$

$g(\ln2)=a$라 하면 $f(a)=\ln2$

$\ln(a^2+1)=\ln2$이고 $a>0$이므로 $a=1$

$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{f'(1)}=1$

따라서 구하는 속력은 $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

26. [출제 의도] 정적분과 급수의 관계 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n\ln(k+n)-n\ln n+n}{k^2+2kn+n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\ln\left(\frac{k}{n}+1\right)+1}{\left(\frac{k}{n}+1\right)^2}\times\frac{1}{n}\right\}=\int_1^2\frac{\ln x+1}{x^2}dx$$

$u(x)=\ln x+1$, $v'(x)=\frac{1}{x^2}$이라 하면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=-\frac{1}{x}$이므로 부분적분법에 의해

$$\int_1^2\frac{\ln x+1}{x^2}dx=\left[-\frac{\ln x+1}{x}\right]_1^2+\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$$

$$=\left[-\frac{\ln x+1}{x}\right]_1^2+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2$$

$$=-\frac{\ln2}{2}+1$$

27. [출제 의도] 치환적분법을 이용하여 문제해결하기

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-xf'(x)$,

$f(x)+xf'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\{xf(x)\}'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$xf(x)=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ ...... ㉠

㉠에서 $\sqrt{x^2+1}=t$라 하면

$x^2+1=t^2$에서 $2x=2t\times\frac{dt}{dx}$, $x=t\times\frac{dt}{dx}$이므로

$$xf(x)=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$=\int\frac{t}{t}dt$$

$=t+C$ (단, C는 적분상수)

$=\sqrt{x^2+1}+C$

$x>0$일 때, $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}+C}{x}$이고

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하므로 $C=-1$

즉, $x>0$일 때, $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

$\sqrt{x^2+1}=t$이므로

$x=1$일 때 $t=\sqrt{2}$, $x=\sqrt{3}$일 때 $t=2$이고

$x=t\times\frac{dt}{dx}$이 되어

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x^2f(x)}{x^2+1}dx$$

$$=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}{x^2+1}dx$$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{2(t-1)}{t}dt$$

$$=\Big[2(t-\ln|t|)\Big]_{\sqrt{2}}^{2}=4-\ln2-2\sqrt{2}$$

따라서 $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x^2f(x)}{x^2+1}dx=4-\ln2-2\sqrt{2}$

28. [출제 의도] 등비급수 문제해결하기

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r_1, r_2라 하자.

조건 (가)에서 $\frac{b_n}{a_n}=\frac{b_1r_2^{\,n-1}}{a_1r_1^{\,n-1}}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n-1}$이 정수이므로 $\frac{r_2}{r_1}=k$ (단, k는 정수)이다.

조건 (나)에서 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}a_n}{\sum_{n=1}^{\infty}b_n}$은 수렴하고, 수열 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{r_1}{r_2}$인 등비수열이다.

즉, $|r_1|<1$, $|r_2|<1$, $\left|\frac{r_1}{r_2}\right|<1$이고

$$\frac{\frac{1}{1-r_1}}{\frac{1}{1-r_2}}=\frac{1}{1-\frac{r_1}{r_2}}\text{에서 }\frac{1-r_2}{1-r_1}=\frac{r_2}{r_2-r_1}$$

$r_2{}^2-2r_1r_2+r_1=0$, $r_2=kr_1$이므로

$k^2r_1{}^2-2kr_1{}^2+r_1=0$, $r_1(k^2r_1-2kr_1+1)=0$

$r_1\neq0$이므로 $k^2r_1-2kr_1+1=0$

$r_1=\frac{-1}{k^2-2k}$ (단, $k\neq0$, $k\neq2$)

k^2-2k의 값이 최소일 때, r_1의 값도 최소이다.

$|r_1|=\left|\frac{-1}{k^2-2k}\right|=\frac{1}{|k^2-2k|}<1$

$k<1-\sqrt{2}$ 또는 $k>1+\sqrt{2}$

이때 k는 정수이므로 $k\le-1$ 또는 $k\ge3$

(ⅰ) $k=-1$ 또는 $k=3$일 때

$k=-1$이면 $r_1=-\frac{1}{3}$, $r_2=kr_1=\frac{1}{3}$이고

$\frac{r_1}{r_2}=-1$이므로 $\left|\frac{r_1}{r_2}\right|<1$에 모순이다.

$k=3$이면 $r_1=-\frac{1}{3}$, $r_2=kr_1=-1$이고

$|r_2|<1$에 모순이다.

(ⅱ) $k=-2$ 또는 $k=4$일 때

$k=-2$이면 $r_1=-\frac{1}{8}$, $r_2=-2r_1=\frac{1}{4}$,

$\frac{r_1}{r_2}=-\frac{1}{2}$이므로 주어진 조건을 만족하고

$\frac{b_4}{a_4}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3=-8$

$k=4$이면 $r_1=-\frac{1}{8}$, $r_2=4r_1=-\frac{1}{2}$,

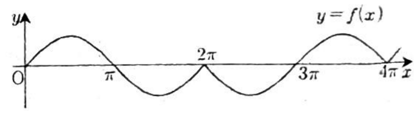
$\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{4}$이므로 주어진 조건을 만족하고

$\frac{b_4}{a_4}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3=64$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 모든 $\frac{b_4}{a_4}$의 값의 합은 $(-8)+64=56$

29. [출제 의도] 정적분의 성질 추론하기

구간 $[0,\infty)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$0<t\le\alpha$인 모든 실수 t에 대하여

$\int_{\alpha-t}^{\alpha+t}\{f(x)+x-\alpha\}dx=0$을 만족시키려면

직선 $y=-x+\alpha$, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $x=\alpha-t$, $x=\alpha$로 둘러싸인 도형의 넓이와 직선 $y=-x+\alpha$, 함수 $y=f(x)$의 그래프와

두 직선 $x=\alpha$, $x=\alpha+t$로 둘러싸인 도형의 넓이가 같아야 한다. 이를 만족시키는 α의 값을 차례로 구하면 $\alpha_1=\pi$, $\alpha_2=3\pi$, $\alpha_3=5\pi$, $\alpha_4=7\pi$

따라서 $\frac{16}{\pi}\times(\alpha_4-\alpha_2)=\frac{16}{\pi}\times 4\pi=64$

30. [출제 의도] 함수의 그래프의 개형 추론하기

함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하다.

$g'(x)=e^{f(x)}\cos(\pi x)\{f'(x)\times\cos(\pi x)-2\pi sin(\pi x)\}$

에서 $\cos\frac{\pi}{2}=\cos\frac{3}{2}\pi=0$이므로 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=g'\left(\frac{3}{2}\right)=0$

닫힌구간 $[0, 2]$에서 $g(x)\geq 0$이고 $g\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{3}{2}\right)=0$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$에서 극소이다.

$g(1)=e^{f(1)}>0$이고 조건 (나)에 의해 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극대이고, 함수 $g(x)$는 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하므로 $g'(1)=0$이다.

$g'(1)=e^{f(1)}\cos\pi(f'(1)\times\cos\pi-2\pi\sin\pi)$

$=e^{f(1)}\times f'(1)=0$

에서 $f'(1)=0$

$f(0)=0$이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 실수)라 하자.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서 $f'(1)=3+2a+b=0$

$2a+b=-3$ …… ㉠

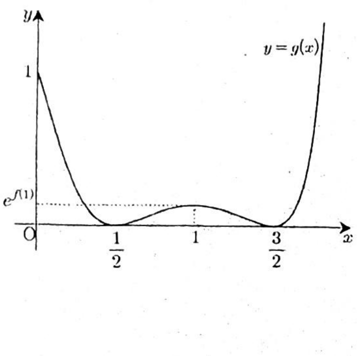
조건 (가)에 의해 닫힌구간 $[0, 2]$에서 정의된 함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$에서만 극소이고 $x=1$에서만 극대이다.

한편, 극값을 갖지 않으면서 미분계수가 0인 점은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{e^2}$이 만나는 서로 다른 점의 개수를 판단함에 있어 영향을 주지 않고, 조건 (가)에 의해 함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$, $x=1$에서만 극값을 가진다.

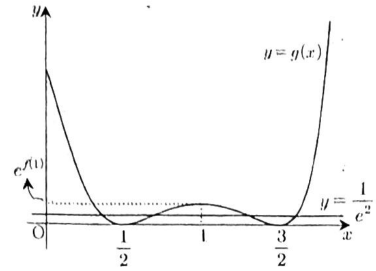
또한, $g(0)=e^{f(0)}=1$이고

$g(2)=e^{f(2)}=e^{8+2(2a+b)}=e^2>\frac{1}{e^2}$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.

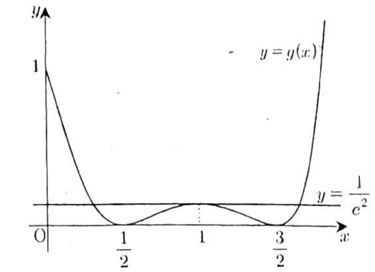


(ⅰ) $f(1)>-2$인 경우



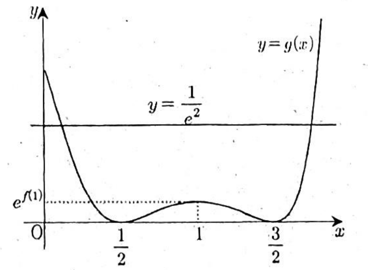
$g(1)=e^{f(1)}$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=\frac{1}{e^2}$과 닫힌구간 $[0, 2]$에서 서로 다른 네 점에서 만나므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $f(1)=-2$인 경우



$g(1)=e^{f(1)}=e^{-2}$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=\frac{1}{e^2}$과 닫힌구간 $[0, 2]$에서 서로 다른 세 점에서 만나므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(ⅲ) $f(1)<-2$인 경우



$g(1)=e^{f(1)}<e^{-2}$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=\frac{1}{e^2}$과 닫힌구간 $[0, 2]$에서 한 점 또는 서로 다른 두 점에서 만나므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ⅰ) ~ (ⅲ)에 의해 $f(1)=1+a+b=-2$

$a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=0$, $b=-3$

$f(x)=x^3-3x$이므로 $g(x)=e^{x^3-3x}\cos^2(\pi x)$

$g\left(\frac{1}{3}\right)=e^{\left(\frac{1}{3}\right)^3-3\times\left(\frac{1}{3}\right)}\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}e^{-\frac{26}{27}}$

이므로 $p=27$, $q=26$

따라서 $p+q=27+26=53$

[기하]

23	⑤	24	②	25	①	26	①	27	③
28	④	29	92	30	175				

23. [출제 의도] 좌표공간의 점의 대칭이동 계산하기

점 $A(1, -2, 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $P(1, 2, -1)$이고, 점 A를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점은 $Q(-1, -2, 1)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+\{2-(-2)\}^2+(-1-1)^2}$

$=2\sqrt{6}$

24. [출제 의도] 쌍곡선의 점근선의 방정식 이해하기

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{36}=1$의

점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{6}{a}x$

한 점근선의 기울기가 2이므로 $a^2=9$

양수 k에 대하여 점 $(5, k)$는 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$

위의 점이므로 $k=8$

점 $(5, 8)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{5x}{9}-\frac{8y}{36}=1$

따라서 접선의 기울기는 $\frac{5}{2}$

25. [출제 의도] 벡터의 내적, 벡터의 연산 이해하기

두 벡터 $2\vec{a}-\vec{b}=(3, 7)$, $\vec{a}+4\vec{c}=(-7, 4k)$가 서로 수직이므로

$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+4\vec{c})=-21+28k=0$

$k=\frac{3}{4}$

따라서 $|\vec{c}|=\sqrt{(-2)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{65}}{4}$

26. [출제 의도] 정사영 이해하기

선분 AE가 평면 BCD와 만나는 점을 G라 하면 점 G는 삼각형 BCD의 무게중심이고 $\overline{AG}=\overline{EG}$

선분 AE의 평면 BCE 위로의 정사영의 길이는 선분 EG의 평면 BCE 위로의 정사영의 길이의 2배이다.

직선 EG와 평면 BCE가 이루는 각의 크기를 θ라 하자.

선분 BC의 중점을 M이라 하면 삼각형 EMG는 직각삼각형이고 $\overline{EM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\overline{GM}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{6}a$

$\overline{EG}=\sqrt{\overline{EM}^2-\overline{GM}^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

$\cos\theta=\frac{\overline{EG}}{\overline{EM}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

선분 EG의 평면 BCE 위로의 정사영의 길이는

$\overline{EG}\times cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}a\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{9}a$

선분 AE의 평면 BCE 위로의 정사영의 길이는

$\frac{8\sqrt{3}}{9}a=\frac{16\sqrt{3}}{3}$

따라서 $a=6$